Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 2

Predati rad predmetnom nastavniku (27.10.2008.)

Kako ovo još nismo definisali na predavanjima, evo ga:

Definicija 0.1. Funkcija koja je rješenje Laplaceove jednačine (1.9) se naziva *harmonična funkcija*.

1. Dokažite da je za svako $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ funkcija

$$v(\mathbf{x}) := \begin{cases} |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{2-n} & ako \quad n > 2 \\ \log|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| & ako \quad n = 2 \end{cases}$$

harmonična u $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}^0\}$, tj. v je C^2 glatka i $\Delta v(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}^0\}$.

Rješenje. Neka je $n > 2$. Onda

$$\partial_k |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{2-n} = (2-n)(x_k - x_k^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{-n},$$

$$\partial_k^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{2-n} = (2-n)|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{-n} - n(2-n)(x_k - x_k^0)^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{-2-n}.$$

Sumirajući zadnju jednakost za $k = 1, \dots, n$ daje željeni rezultat. Neka je $n = 2$. Onda

$$\partial_k \log|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = (x_k - x_k^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{-2},$$

$$\partial_k^2 \log|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{-2} - 2(x_k - x_k^0)^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{-4}.$$

Ponovo, sumirajući preko $k = 1, 2$ dobivamo željeni rezultat.

2. Dokažite da za bilo koje dvije C^2 glatke funkcije u i v imamo

$$v\Delta u = \text{div}\,(v\nabla u) - \nabla v \nabla u.$$

Rješenje.

$$\text{div}\,(v\nabla u) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k(v\partial_k u) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k v \partial_k u + \sum_{k=1}^{n} v\partial_k^2 u = \nabla v \nabla u + v\Delta u.$$

3. Dokažite da u sferičnim koordinatama

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 = r\cos\varphi,$$

$$r > 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

Laplaceova jednačina $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \partial_3^2 u = 0$ ima slijedeću formu

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\partial_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right) u = 0.$$

[SAVJET: Koristeći reprezantaciju Laplaceovog operatora u polarnim koordinatama nađite $\partial_3^2 u + \partial_s^2 u$ i $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u$, gdje je $s = r\sin\theta$ i konzekventno $x_1 = s\cos\varphi$, $x_2 = s\sin\varphi$.]

Rješenje. Neka je $s = r\sin\theta$. Onda koristeći polarnu reprezentaciju Laplaceovog operatora dobivamo

$$\partial_3^2 u + \partial_s^2 u = \partial_r^2 u + r^{-1}\partial_r u + r^{-2}\partial_\theta^2 u.$$

Kako su $x_1 = s\cos\varphi, x_2 = s\sin\varphi$, takodjer imamo:

$$\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = \partial_s^2 u + s^{-1}\partial_s u + s^{-2}\partial_\varphi^2 u.$$

Odavdje imamo

$$\partial_1^2 u + \partial_2^2 + \partial_3^2 u = \partial_r^2 u + r^{-1}\partial_r u + r^{-2}\partial_\theta^2 u + s^{-1}\partial_s u + s^{-2}\partial_\varphi^2 u. \quad (1)$$

Iz jednakosti $x_3 = r\cos\theta, s = r\sin\theta$ imamo kao iz zadatka 2 sa prošlih vježbi

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \sin\theta,\ \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Takodjer je jasno da

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0.$$

Lančano pravilo implicira

$$\partial_s u = (\partial_r u)\frac{\partial r}{\partial s} + (\partial_\theta u)\frac{\partial\theta}{\partial s} + (\partial_\varphi u)\frac{\partial\varphi}{\partial s} = (\partial_r u)\sin\theta + (\partial_\theta u)\frac{\cos\theta}{r}.$$

Željeni rezultat slijedi iz jednačine (1) i jednakosti $s = r\sin\theta$.