PP-talasi sa torzijom

u metrički-afinoj gravitaciji

Vedad Pašić i Dmitri Vassiliev

`V.Pasic@bath.ac.uk` `D.Vassiliev@bath.ac.uk`

Department of Mathematics

University of Bath

Matematički model

- Prostor-vrijeme

$$= \begin{array}{ccccc} \{M & , & g & , & \Gamma\} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{4-mnogostrukost} & & \text{Lorentzova metrika} & & \text{afina konekcija} \end{array}$$

Matematički model

- Prostor-vrijeme

$$= \begin{array}{ccccc} \{M & , & g & , & \Gamma\} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{4-mnogostrukost} & & \text{Lorentzova metrika} & & \text{afina konekcija} \end{array}$$

- Metrički afina gravitacija $(10 + 64$ nepoznate$)$

Matematički model

- Prostor-vrijeme

$$= \begin{array}{ccccc} \{M & , & g & , & \Gamma\} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{4-mnogostrukost} & & \text{Lorentzova metrika} & & \text{afina konekcija} \end{array}$$

- Metrički afina gravitacija ($10 + 64$ nepoznate)
- Definicija varijacijskog funkcionala (akcija)

$$S := \int q(R)$$

Matematički model

- Euler-Lagrangeov sistem jednačina

$$\frac{\partial S}{\partial g} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Gamma} = 0 \tag{2}$$

Matematički model

- Euler-Lagrangeov sistem jednačina

$$\frac{\partial S}{\partial g} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Gamma} = 0 \qquad (2)$$

- Primjeri $q(R)$:
  - $q(R) = R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}$
  - $q(R) = Ric_{\kappa\lambda} Ric^{\kappa\lambda}$
  - $q(R) = \mathcal{R}^2$

Matematički model

- Opšta formula za $q(R)$ sadrži 16 različitih R^2 izraza sa 16 uparujućih konstanti

Matematički model

- Opšta formula za $q(R)$ sadrži 16 različitih R^2 izraza sa 16 uparujućih konstanti
- Naš model gravitacije pokušava opisati fizičke fenomene čija je karakteristična talasna dužina dovoljno mala a krivina dovoljno velika

Riemannovo prostor-vrijeme

Definicija 1 *Prostor-vrijeme nazivamo Riemannovim ako je konekcija* Γ *tipa Levi-Civita* $(\nabla g = 0, T = 0)$.

Teorem 1 *(Vassiliev 2005) Za generičnu kvadratnu akciju jedina Riemannova rješenja jednačina (1) i (2) su*

- *Einsteinovi prostori* $(Ric = \Lambda g)$
- *PP-prostori sa paralelnom Ricci krivinom*

PP-prostor je prostor-vrijeme Riemannovog tipa koje uključuje paralelni spinor.

$$(ds^2 = 2dudv - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + f(x^1, x^2, v)(dv)^2)$$

Generalizirani PP-prostori

- Metrika g je pp-metrika

Generalizirani PP-prostori

- Metrika g je pp-metrika
- Posmatramo polariziranu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm i dA$$

i tražimo rješenja u obliku ravnih talasa

Generalizirani PP-prostori

- Metrika g je pp-metrika
- Posmatramo polariziranu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm i dA$$

  i tražimo rješenja u obliku ravnih talasa
- Paralelni spinor $\Rightarrow \exists$ paralelni nula vektor l

Generalizirani PP-prostori

- Metrika g je pp-metrika
- Posmatramo polariziranu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm i dA$$

i tražimo rješenja u obliku ravnih talasa

- Paralelni spinor $\Rightarrow \exists$ paralelni nula vektor l
- Definišimo fazu (skalarna funkcija) sa

$$\varphi : M \to \mathbb{R}, \quad \varphi(y) := \int_{y_0}^{y} l \cdot dx$$

Generalizirani PP-prostori

- $\{\varphi = const\} =$ "talasna fronta"
- "ravni talas" = "A paralelno duž talasnih fronti" + $A \perp l$

Generalizirani PP-prostori

- $\{\varphi = const\}$ = "talasna fronta"
- "ravni talas" = "A paralelno duž talasnih fronti" + $A \perp l$

Definicija 3 *Generalizirani PP-prostor je metrički kompatibilno prostor-vrijeme sa pp-metrikom i torzijom*

$$T := \frac{1}{2} Re(A \otimes dA)$$

Glavni teorem

Generalizirani PP-prostori sa paralelnom Ricci krivinom su rješenja sistema jednačina (1) i (2).

Dokaz glavnog teorema

Dokaz koristi "sirovu snagu" - niko geometrijski ne razumije čak ni zašto su PP-prostori rješenja naših jednačina. Koristimo slijedeće pretpostavke:

- Naše prostor-vrijeme je metrički kompatibilno.
- Krivina našeg prostor-vremena ima sve uobičajene simetrije krivine kao u Riemannovom slučaju.
- $\mathcal{R} = 0$
- Torzija je čisto tenzorska.

Eksplicitne jednačine

$$d_1 \mathcal{W}^{\kappa\lambda\mu\nu} Ric_{\kappa\mu} + d_3 \left(Ric^{\lambda\kappa} Ric_{\kappa}{}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\lambda\nu} Ric_{\kappa\mu} Ric^{\kappa\mu} \right) = 0, \tag{1}$$

Eksplicitne jednačine

$$d_1\mathcal{W}^{\kappa\lambda\mu\nu}Ric_{\kappa\mu} + d_3\left(Ric^{\lambda\kappa}Ric_\kappa{}^\nu - \frac{1}{4}g^{\lambda\nu}Ric_{\kappa\mu}Ric^{\kappa\mu}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &d_6\nabla_\lambda Ric_{\kappa\mu} - d_7\nabla_\kappa Ric_{\lambda\mu} \\ &+d_6\left(Ric^\eta{}_\kappa(T_{\eta\mu\lambda} - T_{\lambda\mu\eta}) + \frac{1}{2}g_{\mu\lambda}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\kappa\xi}\left(T_\eta{}^\xi{}_\zeta - T_\zeta{}^\xi{}_\eta\right) + g_{\mu\lambda}Ric^\eta{}_\xi T_\eta{}^\xi{}_\kappa\right) \\ &-d_7\left(Ric^\eta{}_\lambda(T_{\eta\mu\kappa} - T_{\kappa\mu\eta}) + \frac{1}{2}g_{\kappa\mu}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\lambda\xi}\left(T_\eta{}^\xi{}_\zeta - T_\zeta{}^\xi{}_\eta\right) + g_{\kappa\mu}Ric^\eta{}_\xi T_\eta{}^\xi{}_\lambda\right) \\ &+b_{10}\left(\left(g_{\kappa\mu}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\lambda\xi} - g_{\mu\lambda}\mathcal{W}^{\eta\zeta}{}_{\kappa\xi}\right)\left(T_\eta{}^\xi{}_\zeta - T_\zeta{}^\xi{}_\eta\right) + Ric^\eta{}_\xi\left(g_{\kappa\mu}T_\eta{}^\xi{}_\lambda - g_{\mu\lambda}T_\eta{}^\xi{}_\kappa\right)\right) \\ &+2b_{10}\left(\mathcal{W}^\eta{}_{\mu\kappa\xi}\left(T_\eta{}^\xi{}_\lambda - T_\lambda{}^\xi{}_\eta\right) + \mathcal{W}^\eta{}_{\mu\lambda\xi}\left(T_\kappa{}^\xi{}_\eta - T_\eta{}^\xi{}_\kappa\right) - \mathcal{W}^{\xi\eta}{}_{\kappa\lambda}T_{\eta\mu\xi}\right) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

gdje

$$d_1 = b_{912} - b_{922} + b_{10}, \qquad d_3 = b_{922} - b_{911},$$
$$d_6 = b_{912} - b_{911} + b_{10}, \qquad d_7 = b_{912} - b_{922} + b_{10},$$

Trenutni rad

- Naša rješenja - modeli za neutrine?

Trenutni rad

- Naša rješenja - modeli za neutrine?
- Poredimo naš metrički-afin model sa klasičnim modelom za neutrine.

Trenutni rad

- Naša rješenja - modeli za neutrine?
- Poredimo naš metrički-afin model sa klasičnim modelom za neutrine.
  - Weylova jednačina (Diracova jednačina sa masom nula).

Trenutni rad

- Naša rješenja - modeli za neutrine?
- Poredimo naš metrički-afin model sa klasičnim modelom za neutrine.
  - Weylova jednačina (Diracova jednačina sa masom nula).
  - Einstein-Weylov model (uključuje gravitaciju)

Trenutni rad

- Akcija u ovom slučaju

$$S := \int \mathcal{R} + \text{Weylova akcija}$$

Trenutni rad

- Akcija u ovom slučaju

$$S := \int \mathcal{R} + \text{Weylova akcija}$$

- $\partial S / \partial g = 0, \partial S / \partial \xi = 0$ - znamo da možemo konstruisati rješenja ovog modela koristeći PP-prostore.