N.Okčić F.Dedagić, V.Pašić

USLOVI DJELOVANJA OPERATORA SUPERPOZICIJE U BANACHOVIM PROSTORIMA TEŽINSKIH FUNKCIJA PRIRODNOG ARGUMENTA*

ACTING CONDITIONS OF THE SUPERPOSITION OPERATOR IN BANACH SPACES OF WEIGHTED FUNCTIONS WITH A DESCRETE ARGUMENT

Abstract

This paper considers a non-linear superposition operator on weighted Banach spaces $l_{p,\sigma}$, where σ is the weight function with the property that: $(\forall n \in \mathbb{N})\sigma(n) \geq 1$. We present the necessary and sufficient conditions of action of the operator from $l_{p,\sigma}$ to $l_{q,\tau}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, and also the $\mathcal{L}$-characteristic of the considered action of the operator.

Sažetak

U ovom radu razmatran je nelinearni operator superpozicije, na težinskim Banach-ovim prostorima $l_{p,\sigma}$, gdje je σ, težinska funkcija sa osobinom: $(\forall n \in \mathbb{N})\sigma(n) \geq 1$. Dati su neophodni i dovoljni uslovi djelovanja operatora iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, kao i $\mathcal{L}$-karakteristika djelovanja posmatranog operatora.

Idealni prostori: Sa χ_D ćemo označavati *karakterističnu funkciju skupa*

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in D \\ 0 & , \quad x \notin D \end{cases}$$

Sa P_D označavat ćemo *operator projektovanja* tj. množenje sa karakterističnom funkcijom χ_D

$$P_D x(s) = \chi_D(s)x(s) \tag{1}$$

Kuglu sa centrom u 0 poluprečnika r u S, označavat ćemo sa $B_r(S)$.

*Ovaj rad je finansijski podržan od Federalnog ministarstva obrazovanja, nauke kulture i sporta/športa Federacije BiH (Ugovor broj: 04-39-6171/92/01, od dana 27.12.2001.)

Definicija 1 *Banach-ov prostor X nazivamo idealnim ako iz $|x| \leq |y|$, gdje $x \in S$, $y \in X$, slijedi da je $x \in X$ i da je $||x||_X \leq ||y||_X$. [7]*

Za element $x \in X$ reći ćemo da ima apsolutno neprekidnu normu, ako važi

$$\lim_{\lambda(D)\to 0} ||P_D x||_X = 0 \tag{2}$$

Skup svih elemenata $x \in X$ koji imaju apsolutno neprekidnu normu, označavat ćemo sa X^0, i zvat ćemo ga *regularni dio* od X. X^0 je zatvoren podprostor od X. Idealan prostor X za koga važi $X^0 = X$ naziva se regularnim.

Operator superpozicije: Neka je $f = f(s,u)$ funkcija dvije varijable definisana na $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ i čije su vrijednosti u $\mathbb{R}$. Funkcijom f je generisan operator

$$Fx = f(s,x) \tag{3}$$

Ovako definisan operator naziva se *operator superpozicije.*
Ukoliko operator superpozicije zadovoljava

$$F\Theta = \Theta \tag{4}$$

to znači da funkcija koja generiše dati operator zadovoljava jednakost

$$f(s,0) = 0 \ \ , \ s.s. \text{ na } \mathbb{R} \tag{5}$$

U tom slučaju operator F komutira sa operatorom projektovanja. tj. važi $FP_D = P_D F$. Za dvije funkcije x_1 i x_2 kažemo da su disjunktne ako važi $suppx_1 \cap suppx_2 = \emptyset$, i pišemo $x_1 d x_2$. Za operator F kažemo da je parcijalno aditivan ako za proizvoljne disjunktne funkcije x i y važi $F(x+y) = Fx + Fy$ Ako operator superpozicije F zadovoljava (4) onda je on parcijalno aditivan. Uslov (4) u mnogim slučajevima nije toliko restriktivan, zato što uvijek možemo izvršiti prelaz na operator suprepozicije $\tilde{F}$, generisan funkcijom

$$\tilde{f}(s,u) = f(s, x_0(s) + u) - f(s, x_0(s)) \tag{6}$$

za neku fiksiranu funkciju x_0, definisanu na $\mathbb{N}$. Jasno je da funkcija $\tilde{f}$ zadovoljava (5).

Težinski Banach-ovi prostori nizova $l_{p,\sigma}$: Neka je $\sigma = (\sigma(s))_{s\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz nenegativnih realnih brojeva. Sa $l_{p,\sigma}$, $1 \leq p < \infty$, označit ćemo skup svih funkcija $x = (x(s))_{s\in\mathbb{N}}$ sa osobinom da je

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) < \infty$$

Funkciju σ zvat ćemo *težinska funkcija.*
U $l_{p,\sigma}$ uvodimo normu na slijedeći način

$$||x||_{l_{p,\sigma}} = \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \; 1 \leq p < \infty$$

odnosno za $p = \infty$

$$||x||_{l_{\infty,\sigma}} = \sup_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|\sigma(s) \tag{7}$$

Na taj način normiran prostor $l_{p,\sigma}$ je kompletan, tj. $l_{p,\sigma}$ je Banach-ov prostor. Ako uzmemo da je $\sigma \in m = l_\infty$, imali bi na osnovu Abel-ovog kriterija konvergencije da je $l_{p,\sigma} \subset l_p$. Medjutim, izborom težinske funkcije tako da je za svako $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(n) = 1$, imamo da je $l_p \subset l_{p,\sigma}$, tj. važilo bi $l_{p,\sigma} = l_p$. Kako je l_p, $1 \leq p \leq \infty$ specijalan slučaj našeg razmatranja, onda gore pomenuti slučaj izbora težinske funkcije nije interesantan. Zato ćemo izbor težinske funkcije vršiti tako da je

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \; \sigma(n) \geq 1 \tag{8}$$

Lemma 1 *Neka je $1 \leq p < q \leq \infty$. Potreban i dovoljan uslov da $l_{p,\sigma} \subset l_{q,\sigma}$ je da težinska funkcija σ zadovoljava uslov (8)*

Dokaz :

Neka je $1 \leq p < q \leq \infty$ i neka je $l_{p,\sigma} \subset l_{q,\sigma}$. Izaberimo funkciju x tako da je $x_k = 1$ i $x_n = 0$ za $n \neq k \in \mathbb{N}$. Tada bi zbog $l_{p,\sigma} \subset l_{q,\sigma}$, imali

$$||x||_{l_{p,\sigma}} \geq ||x||_{l_{q,\sigma}}$$

a zbog izbora funkcije x, to bi značilo

$$(\sigma(k))^{\frac{1}{p}} \geq (\sigma(k))^{\frac{1}{q}}$$

Kako je $p < q$, odnosno $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$, zaključujemo da mora biti $\sigma(k) \geq 1$.
Neka je sada zadovoljen uslov (8), i neka je $\beta > 1$ takav da je $q = p\beta$. Ne umanjujući opštost, neka je $x \in l_{p,\sigma}$ takav da je $\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) = 1$. Tada je za svako $s \in \mathbb{N}$, $|x(s)|\sigma(s) \leq 1$ pa je onda

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^q \sigma(s) = \sum_{s\in\mathbb{N}} (|x(s)|^p \sigma(s))^\beta (\sigma(s))^{1-\beta}$$

$$\leq \sum_{s\in\mathbb{N}} (|x(s)|^p \sigma(s))^\beta \leq \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s)$$

Dakle $||x||_{l_{q,\sigma}} \leq ||x||_{l_{p,\sigma}}$ tj. $l_{p,\sigma} \subset l_{q,\sigma}$.([6]) ♣

Neka je A proizvoljan podskup od $l_{p,\sigma}$. Označimo sa $\Sigma(A)$ skup svih $x \in l_{p,\sigma}$ za koje postoji konačna particija $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ od $\mathbb{N}$, i funkcije $x_j \in A$, $j = 1, 2, \ldots, m$, takve da je $x(s) = x_j(s)$ za $s \in \omega_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Drugačije rečeno, $\Sigma(A)$ je skup svih funkcija koje imaju formu

$$x = \sum_{j=1}^{m} P_{\omega_j} x_j$$

gdje je $x_j \in A$ i $\omega_j \in \mathcal{M}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Skup $\Sigma(A)$ nazivamo Σ-*omotač* od A.

Lemma 2 *Ako operator superpozicije F djeluje iz $A \subset l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, onda on djeluje iz $\Sigma(A)$ u $l_{q,\tau}$. [1]*

Uzimajući specijalno da je $A = B_1(l_{p,\sigma})$, skup $\Sigma(A)$ ćemo jednostavno označavati sa Σ. Druga karakterizacija skupa Σ data je lemmom:

Lemma 3 *Neka je $x \in l_{p,\sigma}$. Tada važi:*
$x \in \Sigma$ akko se može predstaviti u obliku

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \tag{9}$$

gdje su x_i medjusobno disjunktne funkcije iz jedinične lopte u $l_{p,\sigma}$.
Pri tome vrijedi: ako $x \in l_{p,\sigma}$ pripada Σ, tada se on može predstaviti u obliku (9), pri čemu je $m \leq 2||x||^p_{l_{p,\sigma}} + 1$

Skup Σ je zatvoren i konveksan skup. [7]

Lemma 4 *Neka je $(\sigma(s))_{s\in\mathbb{N}}$ težinska funkcija sa osobinom (8) i neka je $1 \leq p < \infty$. Prostor $l_{p,\sigma}$ je idealan prostor.*

Lemma 5 *Neka je $(\sigma(s))_{s\in\mathbb{N}}$ težinska funkcija sa osobinom (8), i neka je $1 \leq p < \infty$. Prostor $l_{p,\sigma}$ je regularan prostor.*

Kako je svaki regularan prostor skoro perfektan, i zbog zatvorenosti, zaključujemo da je $l_{p,\sigma}$ perfektan prostor.

Uslov djelovanja: U [5], dati su uslovi djelovanja operatora superpozicije na standardnim l_p prostorima. Slijedećom teoremom dati su uslovi djelovanja na prostorima $l_{p,\sigma}$. Neka je funkcija f sup-mjerljiva funkcija, i neka su $p, q \in [1, +\infty)$.

Teorem 1 *Neka je F operator superpozicije generisan funkcijom $f(s,u)$. F preslikava $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$ $(1 \leq p, q < \infty)$ akko postoje $a \in l_{q,\tau}$,$b \geq 0$, $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da važi*

$$|f(s,u)| \leq a(s) + b\sigma(s)^{\frac{1}{q}}\tau(s)^{-\frac{1}{q}}|u(s)|^{\frac{p}{q}} \tag{10}$$

kad god je $s \geq n_0$ i $\mu(s)^{\frac{1}{p}}|u| \leq \delta$

Dokaz : $(\Longrightarrow)$

Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $f(s,0) = 0$, što je ekvivalentno sa tim da je operator F parcijalno aditivan. Pokažimo da za proizvoljno $x \in l_{p,\sigma}$ važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0 \wedge n_\varepsilon \in \mathbb{N})(||x||_{l_{p,\sigma}} < \delta_\varepsilon \Rightarrow ||FP_{n_\varepsilon}x||_{l_{q,\tau}} \leq \varepsilon) \tag{11}$$

gdje je $P_n = P_{\{n+1,n+2,\ldots\}}$, operator projektovanja. Pretpostavimo suprotno tj.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(||x||_{l_{p,\sigma}} < \delta \wedge ||FP_n x||_{l_{q,\tau}} > \varepsilon)$$

Kako je

$$P_n - P_{n+1} = \chi_{\{n+1,n+2,\ldots\}} - \chi_{\{n+2,n+3,\ldots\}} = \begin{cases} 1 & ; \quad \{n+1,\ldots\} \setminus \{n+2,\ldots\} \\ 0 & ; \quad \{n+1,\ldots\} \cap \{n+2,\ldots\} \end{cases}$$

imamo, $\lim_{m\to\infty} ||F(P_n - P_m)x_n|| = ||FP_n x_n||$. Ovo znači da proizvoljnom $n \in \mathbb{N}$ možemo pridružiti $n^{,} \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$||(P_n - P_{n^{,}})x_n||_{l_{p,\sigma}} \leq \delta \wedge ||F(P_n - P_{n^{,}})x_n||_{l_{q,\tau}} > \varepsilon$$

Principom indukcije možemo konstruisati niz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je $n_1 = 1, n_2 = (n_1)^{,}, \ldots, n_{k+1} = (n_k)^{,}$, tako da za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ važi:

$$||(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}||_{l_{p,\sigma}} \leq 2^{-k} \wedge ||F(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}||_{l_{q,\tau}} > \varepsilon$$

Konstruišimo sada niz dat sa $x_* = \sum_{k=1}^{\infty}(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}$. Za njega važi:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{s\in\mathbb{N}} |x_*(s)|^p\sigma(s) & = & \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s\in\mathbb{N}}(P_{n_k}(s) - P_{n_{k+1}}(s))|x_{n_k}(s)|^p\sigma(s) \\ & = & \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=n_k}^{n_{k+1}}|P_{n_k}x_{n_k}|^p\sigma(s) \\ & \leq & \sum_{k=1}^{\infty}||x_{n_k}||_{l_{p,\sigma}}^p \leq \sum_{k=1}^{\infty}2^{-k} < \infty \end{array}$$

dakle $x_* \in l_{p,\sigma}$.
Sa druge strane je

$$\begin{aligned} ||Fx_*||^q_{l_{q,\tau}} &= \sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,x_*(s))|^q\tau(s) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=n_k}^{n_{k+1}} |f(s,x_{n_k})|^q\tau(s) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^q = \infty \end{aligned}$$

tj. $Fx_* \notin l_{q,\tau}$, a ovo je kontradikcija sa djelovanjem operatora F.
Neka je sada $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Označimo sa f_ε funkciju

$$f_\varepsilon(s,u) = max\{0, |f(s,u)| - 2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\varepsilon\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u(s)|^{\frac{p}{q}}\} \tag{12}$$

Za proizvoljan $x \in l_{p,\sigma}$, na osnovu prvog dijela dokaza, neka su δ_ε i n_ϵ postojeći za koje važi (11). Za taj x formirajmo skup

$$D(x) = \{s > n_\varepsilon : f(s,x) > 2^{\frac{1}{q}}\delta_\varepsilon^{-\frac{p}{q}}\varepsilon\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|x(s)|^{\frac{p}{q}}\} \tag{13}$$

Označimo sa $\tilde{x} = P_{D(x)}x$. Na osnovu Lemme 3, $\tilde{x}$ možemo razložiti na $m = [2\delta_\varepsilon^{-p}\sigma(s)\tau^{-1}(s)||x||^p_{l_{p,\sigma}}]$ disjunktnih funkcija z_j, takvih da je $||z_j|| \leq \delta$ $j = 1,2,\ldots,m$. Sada imamo

$$\begin{aligned} &\sum_{s\in D(x)} |f_\varepsilon(s,x(s))|^q\tau(s) = \sum_{s\in D(x)} |f_\varepsilon(s,\tilde{x}(s))|^q\tau(s) \\ &= \sum_{s\in D(x)}\sum_{j=1}^{m} |f_\varepsilon(s,z_j(s))|^q\tau(s) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{s\in D(x)} |f(s,z_j) - 2^{\frac{1}{q}}\delta_\varepsilon^{-\frac{p}{q}}\varepsilon\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|z_j(s)|^{\frac{p}{q}}|^q\tau(s) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s\in D(x)} |f(s,z_j(s))|^q\tau(s) - \sum_{s\in D(x)} 2\delta_\varepsilon^{-p}\epsilon^q\sigma(s)|z_j(s)|^p\right) \\ &\leq m\varepsilon^q - 2\delta_\varepsilon^{-p}\varepsilon^q||\tilde{x}||^p \\ &\leq m\varepsilon^q - (m-1)\varepsilon^q = \varepsilon^q \end{aligned}$$

Dakle vrijedi $||f_\varepsilon(s,x)||_{l_{q,\tau}} \leq \varepsilon$.
Označimo sa

$$a(s) = \begin{cases} 0 & ;\ s \notin D(x) \\ \sup_{|u|\leq\delta_\varepsilon} f_\varepsilon(s,u) & ;\ s \in D(x) \end{cases} \tag{14}$$

Jasno je da važi

$$||a||^q_{l_{q,\tau}} = \sum_{s\in\mathbb{N}} |a(s)|^q\tau(s) = \sum_{s\in D(x)} (\sup_{|u|\leq\delta_\varepsilon} f_\varepsilon(s,u))^q\tau(s) \leq \varepsilon^q$$

tj. $a \in l_{q,\tau}$. Sada imamo:

$$a(s) \geq f_\varepsilon(s,u) \geq |f(s,u)| - 2^{\frac{1}{q}}\delta_\varepsilon^{-\frac{p}{q}}\varepsilon\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u(s)|^{\frac{p}{q}}$$

za $|u|\mu^{\frac{1}{p}} \leq \delta_\varepsilon$ i $s > n_\varepsilon$. Odavde neposredno slijedi

$$|f(s,u)| \leq a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}}$$

gdje je $b = 2^{\frac{1}{q}}\delta_\varepsilon^{-\frac{p}{q}}\varepsilon$.
$(\Longleftarrow)$
Neka je zadovoljen uslov

$$|f(s,u)| \leq a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}} \;,\; (|u| \leq \delta \;,\; s \geq n)$$

Tada za proizvoljan $x \in l_{p,\sigma}$ imamo

$$\begin{array}{rcl} ||Fx||_{l_{q,\tau}} & = & \sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,u(s))|^q \tau(s) \\ & \leq & \sum_{s\in\mathbb{N}} (a(s))^q \tau(s) + 2^q b \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) \end{array}$$

a ovo je očigledno konačno jer $a \in l_{q,\tau}$ a $x \in l_{p,\sigma}$. Dakle $F : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$. ♣

Slučaj $p = \infty$ ili $q = \infty$: Napomenimo ovde, da ako bi smo posmatrali prostor $l_{\infty,\sigma}$ sa normom (7), da ne dodje do bitnog narušavanja smisla tog prostora, morali bi uvesti dodatno ograničenje na težinsku funkciju, tj. da je $\sigma \in l_\infty$, ali to bi opet značilo da je $l_\infty = l_{\infty,\sigma}$. Zbog svega rečenog, posmatrat ćemo samo standardni prostor ograničenih funkcija l_∞. Neka su $1 \leq p, q < \infty$.

Teorem 2 *Operator superpozicije F, generisan funkcijom f djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u l^0_∞, (l_∞), akko važi:*

$$\lim_{s\to\infty, u\to 0} f(s,u) = 0 \quad (\overline{\lim}_{s\to\infty,u\to 0}|f(s,u)| < \infty)$$

Teorem 3 *Operator F djeluje iz l^0_∞ u $l_{q,\tau}$, (l^0_∞, l_∞ respektivno), akko postoji $n \in \mathbb{N}$ i postoji $\delta > 0$ tako da je*

$$|f(s,u)| \leq a(s) \;\;,\; (s \geq n, |u| \leq \delta)$$

za neko $a \in l_{q,\tau}$, ($a \in l^0_\infty$, $a \in l_\infty$).

Teorem 4 *Operator F djeluje iz l_∞ u $l_{q,\tau}$, (l^0_∞, l_∞ respektivno) akko za svako $r > 0$ postoji $a_r \in l_{q,\tau}$, ($a_r \in l^0_\infty$, $a_r \in l_\infty$), tako da je*

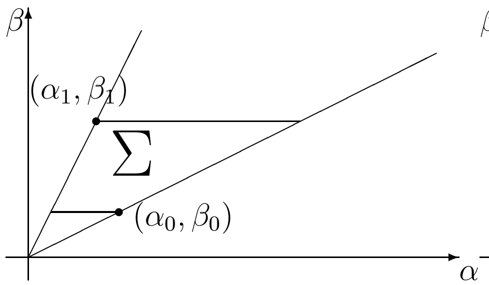
$$|f(s,u)| \leq a_r(s) \;\;,\; (|u| \leq r \;,\; 0 < r < \infty)$$

$\mathcal{L}$-karekteristika

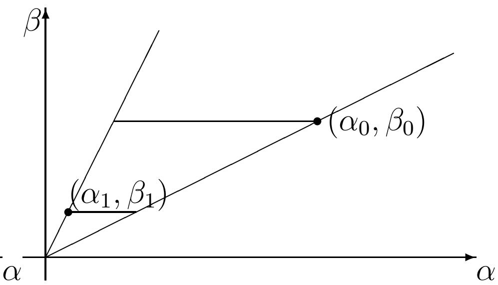
Definicija 2 *Neka je A proizvoljan operator (linearan ili nelinearan). Skup* $\mathcal{L}(A)$*, svih parova* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in R^2_+$*, sa osobinom da operator A preslikava Lebesgue-ov prostor* L_p *u Lebesgue-ov prostor* L_q*, nazivamo* $\mathcal{L}$*-karakteristika operatora A.*

Uvodjenje pojma $\mathcal{L}$-karakteristike operatora, omogućava nam važne teoreme funkcionalne analize, prikazati na jednostavan geometrijski način. Na primjer, klasični teorem interpolacije *Riesz-Thorin-a* ([3]) kaže, da za jedan linearan operator A, njegova $\mathcal{L}$-karakteristika je konveksan skup u R^2_+.
Neka su (α_0, β_0), $(\alpha_1, \beta_1) \in R^2_+$, pri čemu neka je $\alpha_1 \leq \alpha_0$. Označimo sa

$$\Sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha_1, \beta_1) = \begin{cases} \{(\alpha, \beta) \in R^2_+ : \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1, \frac{\beta_0}{\alpha_0} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{\beta_1}{\alpha_1}\} & ; \quad \beta_0 \leq \beta_1 \\ \{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1)\} & ; \quad \beta_0 > \beta_1 \end{cases}$$



Slika 1: $\beta_0 \leq \beta_1$



Slika 2: $\beta_0 > \beta_1$

Neka je sada F operator superpozicije, generisan funkcijom $f(s, u)$. Sa $\mathcal{L}(F)$ označimo skup svih parova $(\alpha, \beta) \in R^2_+$, takvih da $F(l_{p,\sigma}) \subseteq l_{q,\sigma}$, gdje je $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{1}{\beta}$.

Lemma 6 *Neka* (α_0, β_0)*,* $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{L}(F)$*. Tada vrijedi:*

$$\Sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha_1, \beta_1) \subseteq \mathcal{L}(F)$$

Dokaz :

Neka su (α_0, β_0), $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{L}(F)$. Na osnovu Teorema 1, imamo

$$|f(s, u)| \leq a_0(s) + b_0 |u|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}} \quad , \quad a_0 \in l_{\frac{1}{\beta_0}} \ , \ b_0 \geq 0$$

$$|f(s, u)| \leq a_1(s) + b_1 |u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \quad , \quad a_1 \in l_{\frac{1}{\beta_1}} \ , \ b_0 \geq 0$$

iz ovoga onda slijedi da funkciju f možemo zapisati kao, $f = f_1+f_2+f_3+f_4$, pri čemu je

$$\begin{array}{lll} |f_1(s,u)| \le \min\{a_0(s), a_1(s)\} & , & |f_2(s,u)| \le \min\{a_0(s), b_1|u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}\} \\ |f_3(s,u)| \le \min\{a_1(s), b_0|u|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}\} & , & |f_4(s,u)| \le \min\{b_0|u|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}, b_1|u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}\} \end{array}$$

Pri tome $\mathcal{L}(F) \supseteq \mathcal{L}(F_1) \cap \mathcal{L}(F_2) \cap \mathcal{L}(F_3) \cap \mathcal{L}(F_4)$, gdje su F_i, $(i = 1,2,3,4)$, operatori generisani funkcijama f_i, $(i = 1,2,3,4)$. Označimo li sa :

$$\begin{array}{lcl} M_1 & = & \{(\alpha,\beta) : \beta_0 \le \beta \le \beta_1\} \cup \{(\alpha,\beta) : \beta_1 \le \beta \le \beta_0\} \\ M_2 & = & \{(\alpha,\beta) : 0 \le \alpha \le \beta_0\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \alpha\frac{\beta_1}{\alpha_1} \le \beta \le \beta_0\} \\ & \cup & \{(\alpha,\beta) : \beta_0\frac{\alpha_1}{\beta_1} \le \alpha < \infty, \beta_0 \le \beta \le \alpha\frac{\beta_1}{\alpha_1}\} \\ M_3 & = & \{(\alpha,\beta) : 0 \le \alpha \le \beta_1\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \alpha\frac{\beta_0}{\alpha_0} \le \beta \le \beta_1\} \\ & \cup & \{(\alpha,\beta) : \beta_1\frac{\alpha_0}{\beta_0} \le \alpha < \infty, \beta_1 \le \beta \le \alpha\frac{\beta_0}{\alpha_0}\} \\ M_4 & = & \{(\alpha,\beta) : \frac{\beta_0}{\alpha_0} \le \frac{\beta}{\alpha} \le \frac{\beta_1}{\alpha_1}\} \end{array}$$

onda je $M_1 \subseteq \mathcal{L}(F_1)$, $M_2 \subseteq \mathcal{L}(F_2)$, $M_3 \subseteq \mathcal{L}(F_3)$ i $M_4 \subseteq \mathcal{L}(F_4)$. Sada posmatrajmo presjek ova četri skupa u zavisnosti od odnosa β_0 i β_1:
Ako je $\beta_0 < \beta_1$ onda je taj presjek četvorougao prikazan na slici 1.
Ako je $\beta_0 = \beta_1$ onda je to prava koja spaja tačke (α_0,β_0) i (α_1,β_1).
Ako je $\beta_0 > \beta_1$ onda je taj presjek dvoelementni skup $\{(\alpha_0,\beta_0),(\alpha_1,\beta_1)\}$. ♣

Definicija 3 *Skup $M \subset R^2_+$ nazivamo Σ-konveksnim ako iz (α_0,β_0), $(\alpha_1,\beta_1) \in M$, slijedi da je $\Sigma(\alpha_0,\beta_0;\alpha_1,\beta_1) \subseteq M$*

Na osnovu Lemme 6, vidimo da je $\mathcal{L}(F)$, Σ-konveksan skup.

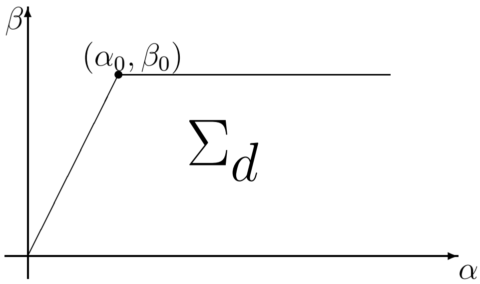
Lemma 7 *Neka je M proizvoljan Σ-konveksan podskup od R^2_+. Tada postoji funkcija $f(s,u)$ koja generiše operator superpozicije F, takva da je $\mathcal{L}(F) = M$. [2]*

Lemma 6 i Lemma 7 pokazuju da se u opštem slučaju $\mathcal{L}$-karakteristika ne može preciznije opisati nego preko Σ-konveksnosti. U specijalnim slučajevima to je ipak moguće, naime to je moguće ako izmedju prostora L_p, za različite p, postoje posebne veze. Tako u slučaju Banach-ovih prostora $l_{p,\sigma}$, znamo da za $p \le q$ je $l_{p,\sigma} \subset l_{q,\sigma}$. Ako je uz to još i za svako $s \in N$, $\mu(s) \ge \mu_0 > 0$, onda definišući skup

$$\Sigma_d(\alpha_0,\beta_0) = \left\{(\alpha,\beta) : 0 \le \alpha \le \alpha_0, \beta \le \alpha\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right\} \cup \{(\alpha,\beta) : \alpha_0 \le \alpha < \infty, \beta \le \beta_0\}$$

imamo:

Teorem 5 *Ako* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}(F)$, *onda je* $\Sigma_d(\alpha, \beta) \subset \mathcal{L}(F)$. *[2]*



Slika 3:

Literatura

[1] J. Appell, P.P. Zabrejko : *Nonlinear superposition operators*, Cambridge University Press (1990), (1-161)

[2] J.Appell, P.P. Zabrejko : *Über die $\mathcal{L}$-charakteristik nichtlinearer operatoren in räumen integrierbarer funktionen*, Manuscripta Math., (1988), (355-367)

[3] J. Bergh, J. Löfström: *Interpolation spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1976), (207)

[4] D. Borwein, X. Gao: *Matrix operators on l_p to l_q*, Canad.Math.Bull.Vol.37(4), (1994), (448-456)

[5] F. Dedagić, P.P. Zabrejko: *On the superposition operator in l_p spaces*, Sibir.Mat.Zhurn., (1987), (86-98)

[6] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities*, Cambridge University Press, (1978), (324)

[7] P.P. Zabrejko: *Ideal function spaces*, Ves.Jaroslav.Uni. , (1974), (12-52)