1.1 Funkcije dvije i više promjenljivih

Funkcije dvije i više promjenljivih

Zamislimo situaciju u kojoj dva proizvoda A i B i njihove potražnje zavise o cijenama p_A i p_B.

Q_A je potražnja za proizvodom A, dok je Q_B potražnja za proizvodom B.

Onda bi bilo realno očekivati da su potražnje ovisne o obje cijene, tj. $Q_A(p_A, p_B)$ i $Q_B(p_A, p_B)$.

Na primjer

$$Q_A(p_A, p_B) = 100 - 5p_A + 2p_B, \quad Q_B(p_A, p_B) = 3p_A - \frac{1}{2p_B^2}$$

Neka su recimo ukupni troškovi tada

$$T(Q_A, Q_B) = 100 + 21Q_A + 3Q_B,$$

a prosječni troškovi proizvodnje proizvoda A i B zajedno su

$$\bar{T}(Q_A, Q_B) = \frac{T(Q_A, Q_B)}{Q_A + Q_B}$$

Općenito, ako imamo n proizvoda sa cijenama $p_1, p_2, \ldots, p_n$ onda će odgovarajuće funkcije potražnje biti

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1(p_1, p_2, \ldots p_n) \\ Q_2 &= Q_2(p_1, p_2, \ldots p_n) \\ &\vdots \\ Q_n &= Q_n(p_1, p_2, \ldots p_n) \end{aligned}$$

Ovdje su Q_i funkcije ili zavisno promjenljive, dok su cijene nezavisno promjenljive. Općenito:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se naziva funkcija sa n promjenljivih $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Ovakava funkcija uzima n brojeva i vraća jedan broj, tj.

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}.$$

Specijalno, ako je $n = 2$, imamo funkcije dvije promjenljive, $f(x_1, x_2)$ ili $f(x, y)$. Na primjer

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 10,$$

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 10,$$

Primjer. Neka je data funkcija proizvodnje P u nekoj fabrici koja zavisi o uloženom radu L i kapacitetu C:

1. $P(L,C) = \alpha \cdot L^{a-1} \cdot C^a$ - Doublasova funkcija
2. $P(L,C) = L^2 \ln \frac{L}{C} + C^2$. Ako je $L = 10$, a $C = 5$, tada je

$$P(10,5) = 10^2 \ln \frac{10}{5} + 5^2 = 100 \ln 2 + 25$$

1.1.1 Parcijalni izvodi funkcija više promjenljivih

Parcijalni izvodi funkcija više promjenljivih

Ako nam je data funkcija više promjenljivih $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, izvod ove funkcije po promjenljivoj x_1 dobivamo na uobičajen način, dok sve ostale promjenljive $x_2, x_3, \ldots$ držimo fiksnim!

Općenito, izvod funkcije po x_k nalazimo tako što $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ držimo fiksnim. Posmatrajmo sad izvod po x_1. Slično kao kod standarnih izvoda, ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x_1} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1}$$

onda se vrijednost tog limesa naziva *prvi parcijalni izvod funkcije* f po promjenljivoj x_1. Pišemo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f'_{x_1}, \quad f_{x_1}.$$

Prilikom izračunavanja ovog izvoda, sve ostale promjenljive su fiksne. Obratno, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ se izračunava kada se smatra da su $x_1, x_3, \ldots, x_n$ fiksne, itd.

Primjer.

1. $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_2^2 - 10x_1 + 5$
2. $f(x, y) = (2x - 3y)(6xy - 1)$
3. $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_2) \cdot e^{-x_1x_2}$.

1.1.2 Parcijalni diferencijali

Parcijalni diferencijali

Ako je kod funkcija jedne promjenljive diferencijal bio definisan kao $dy = y'dx$, za funkciju n promjenljivih definišemo n parcijalnih diferencijala:

$$d_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1$$

$$d_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

$$d_n f = \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Totalni diferencijal funkcije više promjenljivih

Imamo da je *totalni diferencijal*

$$df = d_1 f + d_2 f + \ldots + d_n f$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Specijalno, za $n = 2$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

1.1.3 Parcijalni izvodi drugog reda

Parcijalni izvodi drugog reda

Generalno govoreći, a kako smo vidjeli iz primjera, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ su također funkcije više nezavisnih promjenljivih $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Od svake od njih možemo tražiti izvod po bilo kojoj promjenljivoj, te dobiti parcijalni izvod drugog reda!

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}.$$

Ukoliko tražimo drugi parcijalni izvod prvog izvoda, dobijemo mješoviti drugi parcijalni izvod

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}.$$

Na isti način dobijemo za parcijalni izvod po x_2:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

VAŽNO - ovi mješoviti izvodi nisu obavezno isti!!! Ovaj proces onda možemo nastaviti unedogled kako bismo dobili treći, četvrti, peti, itd. mješoviti parcijalni izvod, npr. za funkciju dvije promjenljive

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \ldots$$

Primjenjujemo tačno isti pristup kao prije, dakle ako izvodimo po x_1, onda ostale promjenljive držimo fiksnim!

Primjer. Naći sve druge parcijalne izvode funkcije

$$f(x, y) = xe^{-xy}.$$

Schwartzov teorem

Teorem 1.1. *Ako su $f(x, y)$ i parcijalni izvodi f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} definirane i neprekidne u tački $n(x, y)$ i nekoj njenoj okolini, tada su mješoviti parcijalni izvodi međusobno jednaki, tj.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Napomena: iz prethodnog primjera se vidi da ovaj teorem vrijedi općenito za bilo koje parcijalne izvode. Važno je koliko se puta derivira po određenoj promjenljivoj a da pri tome uopće nije bitan poredak deriviranja.

Primjer. $z(x, y) = x^2 \log[y - \sin y + ye^y - \ln(2y^3 - 13)] + 31$

1.2 Primjena diferencijalnog računa više promjenljivih

Primjena diferencijalnog računa više promjenljivih

Neka je sada dozvoljeno da i naše ekonomske funkcije imaju više promjenljivih, npr.

$$Q_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, k, t),$$

gdje su p_i cijene različitih proizvoda, k dohodak, t vrijeme. Onda možemo definisati koeficijent *parcijalne elastičnosti* funkcije Q_1 kao:

$$E_{Q_1, p_1} = \frac{p_1}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}$$

No takođe možemo posmatrati kako promjene cijena drugih proizvoda utiču na Q_1. To nazivamo *koeficijent ukrštene elastičnosti*

$$E_{Q_1, p_i} = \frac{p_i}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial p_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

S druge strane imamo i *koeficijent dohodovne elastičnosti*

$$E_{Q_1,k} = \frac{k}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial k},$$

te koeficijent elastičnosti u odnosu na vrijeme

$$E_{Q_1,t} = \frac{t}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial t}.$$

Primjer. Izračunati koeficijente parcijalne i ukrštene elastičnosti funkcije

$$Q_A(p_A, p_B) = 50 - 3p_A + 5p_B$$

na nivou cijene $p_A = 10$ i $p_B = 4$. Interpretirati rezultat.

Primjer.

$$Q_2(p_1, p_2) = 100 + 2p_1 - 4p_2$$

je funkcija potražnje sa cijenama p_1, p_2.

1. Za koje cijene p_1 i p_2 ova funkcija ima ekonomskog smisla.
2. Skicirati graf u koordinatnom prostoru.
3. Izračunati stopu promjene prethodne funkcije u odnosu na cijene $p_1 = 5, p_2 = 1$.

Funkcija potražnje (ponude)

$$Q_i(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

$\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}$ je stopa promjene funkcije potražnje Q_i u odnosu na cijenu p_k, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Ako je ovaj parcijalni izvod veći od nule, Q_i je rastuća funkcija u odnosu na cijenu p_k.

Ako je ovaj parcijalni izvod manji od nule, Q_i je opadajuća funkcija u odnosu na cijenu p_k.

Funkcija ukupnih troškova

Ako pretpostavimo da imamo proizvodnju dva dobra sa potražnjama Q_1 i Q_2, funkcija ukupnih troškova je

$$T(Q_1, Q_2) = VT(Q_1, Q_2) + FT.$$

Očito, kao i prije, $FT = T(0, 0)$. Sada je funkcija prosječnih troškova međutim

$$\bar{T}(Q_1, Q_2) = \frac{T(Q_1, Q_2)}{Q_1 + Q_2}.$$

$\frac{\partial T}{\partial Q_i}$ je marginalni (granični) trošak u odnosu na potražnju Q_i, $i = 1, 2, \ldots n$.

Primjer. Ako je $\bar{T}(Q_1, Q_2) = 1 + 10(Q_1 + Q_2)^{-1}$, odrediti koji su fiksni troškovi te naći funkcije graničnih troškova u odnosu na Q_1, a onda u odnosu na Q_2. Interpretirati rezultat.

Funkcija ukupnih prihoda i dobiti

Posmatrajmo proizvodnju dva dobra čije su potražnje Q_1 i Q_2, a cijene p_1 i p_2. Tada je

$$P(p_1, p_2) = Q_1 p_1 + Q_2 p_2 = Q_1(p_1, p_2) p_1 + Q_2(p_1, p_2) p_2$$

funkcija ukupnog prihoda kao funkcija cijena, dok je

$$P(Q_1, Q_2) = Q_1 p_1(Q_1, Q_2) + Q_2 p_2(Q_1, Q_2)$$

funkcija ukupnog prihoda kao funkcija potražnji.

$\frac{\partial P}{\partial Q_i}$ je granični prihod u odnosu na potražnju Q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$D(Q_1, Q_2) = P(Q_1, Q_2) - T(Q_1, Q_2)$$

je onda funkcija dobiti, dok je

$$\bar{P}(Q_1, Q_2) = \frac{P(Q_1, Q_2)}{Q_1 + Q_2}.$$

prosječni prihod.

Primjer. Date su cijene dva dobra p_1 i p_2 kao funkcije proizvodnje Q_1 i Q_2, kao i funkcija ukupnih troškova $T(Q_1, Q_2)$

$$p_1 = 10 - Q_1,\ p_2 = 20 - Q_2,\ T(Q_1, Q_2) = 4Q_1^2 + Q_2^2 + 10.$$

Izvesti funkciju dobiti u ovisnosti o Q_1, Q_2.

1.2.1 Homogene funkcije

Homogene funkcije

Definicija 1.1. Za funkciju $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kažemo da je homogena stepena homogenosti α ako vrijedi

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Primjer.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1 x_3.$$

Primjer. Proizvodnja P zavisi o uloženom radu L i uloženom kapitalu C:

$$P(L, C) = L^2 \ln \frac{C}{L} + C^2.$$

Ako se oba proizvoda faktora (L, C) istovremeno povećaju za 10%, za koliko procenata se promjeni proizvodnja.

Općenito, za proizvoljnu funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koja je homogena stepena homogenosti α

$$\frac{\Delta f}{f} = (\lambda^\alpha - 1) \cdot 100\%,$$

tj. procenat promjene funkcije f kada se svaka promjenljiva uveća za $\lambda = 1 + \frac{p}{100}$, gdje je p procenat promjene svake promjenljive.

1.2.2 Eulerov teorem

Eulerov teorem

Teorem 1.2. *Neka je funkcija f homogena funkcija stepena homogenosti α. Tada vrijedi*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha \cdot f$$

Ako cijelu jednakost podijelimo sa f, dobijemo ekvivalent:

Teorem 1.3. *Neka je funkcija f homogena funkcija stepena homogenosti α. Tada je zbir svih koeficijenata elastičnosti te funkcije jednak stepenu homogenosti funkcije α i vrijedi*

$$\frac{x_1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_2}{f} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{x_n}{f} \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha$$

Primjer. $E_{P,L} + E_{P,C} = 2$, gdje je $P(L, C) = L^2 \ln \frac{C}{L} + C^2$, tj. P je homogena funkcija stepena homogenosti $\alpha = 2$.

1.3 Ekstremi funkcija više promjenljivih

Ekstremi funkcija više promjenljivih

Na isti način kao što je to bio slučaj kod funkcija jedne promjenljive, sada posmatramo *lokalne* ekstreme funkcija više promjenljivih.

Definicija 1.2. Za funkciju $f = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kažemo da ima lokalni minimum u tački $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ako je ona definisana u nekoj okolini U_A tačke A i ako vrijedi da je $f(X) > f(A)$ za svako $x \in U_A$.

Definicija 1.3. Za funkciju $f = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kažemo da ima lokalni maksimum u tački $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ako je ona definisana u nekoj okolini U_A tačke A i ako vrijedi da je $f(X) < f(A)$ za svako $x \in U_A$.

Stacionarna tačka funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je tačka u kojoj su svi parcijalni izvodi funkcije jednaki nuli, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Primjedba. Stacionarna tačka ne mora biti tačka lokalnog ekstrema.

Da li je stacionarna tačka uopće tačka lokalnog ekstrema i ako jeste, da li je maksimum ili minimum, ispituje se po tzv. *Silvestrovom kriteriju.*

Hessian

Definicija 1.4. Neka je $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Za ovu funkciju definiramo Hesseovu matricu ili *Hessian* funkcije:

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix},$$

gdje su

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

1.3.1 Silvesterov kriterij

Silvesterov kriterij

1. Ako za Hessijan određen u stacionarnoj tački funkcije vrijedi

$$D_1 = f_{11} > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots,$$

$D_n = |H| > 0$ tada je stacionarna tačka tačka lokalnog minimuma.

2. Ako za Hessijan određen u stacionarnoj tački funkcije vrijedi

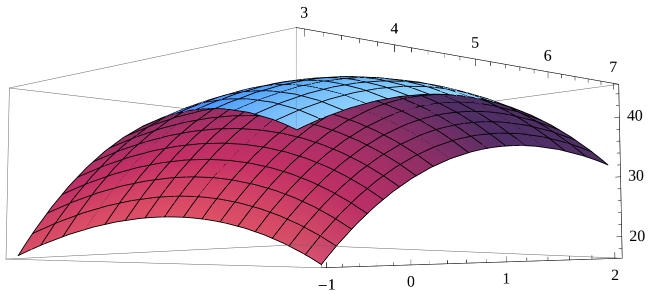
$$D_1 = f_{11} < 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots,$$

tj. naizmjenično se mijenja znak glavnih minora Hessijana, počevši od negativnog, tada je stacionarna tačka tačka lokalnog maksimuma.

Primjer. Naći lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 - 16$.

Primjer. Naći optimalnu kombinaciju proizvodnje u cilju maksimiziranja dobiti iz primjera funkcija prihoda i dobiti:

$$D(Q_1, Q_2) = -5Q_1^2 - 2Q_2^2 + 10Q_1 + 20Q_2 - 10$$



1.3.2 Optimum - vezani (uvjetni) ekstrem

Optimum - vezani (uvjetni) ekstrem

Imamo funkciju cilja $f(x, y)$ i tražimo ili maksimum ili minimum te funkcije nezavisnih promjenljivih x, y pod uslovom $g(x, y) = 0$.

Metod supstitucije. Ovaj metod primjenjujemo kada iz uslova $g(x, y) = 0$ možemo jednu od promjenljivih izraziti pomoću one druge, npr. $y = \varphi(x)$, a zatim to zamjenimo (supstituišemo) u jednačinu funkcije $f(x, y)$.

Na taj način funkcija postaje funkcija jedne promjenljive za koju znamo kako se određuje minimum i maksimum

$$f(x, y) = f(x, \varphi(x)) = F(x).$$

Primjer. Zadana je funkcija korisnosti za potrošača $u(Q_1, Q_2) = Q_1 Q_2$, gdje je Q_1 količina proizvoda A a Q_2 količina proizvoda B. Jedinična cijena proizvoda A je $1KM$ a cijena proizvoda B je $4KM$. Ukoliko potršač ima na raspolaganju $1200KM$ koje želi u potpunosti potrošiti, pronađite količine proizvoda A i B uz koje se ostvaruje maksimalna korisnost. Kolika je maksimalna korisnost?

Metod Lagrangeovih multiplikatora

Ovaj se metod koristi u slučaju kad iz dodatnog uvjeta ne možemo izraziti jednu nepoznanicu preko druge, ako je u pitanju funkcija cilja sa dvije promjenljive.

Dakle ako je funkcija cilja $f(x, y)$ a dodatni uvjet $g(x, y) = 0$, umjesto funkcije $f(x, y)$ uvodimo novu funkciju

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

i sada se problem svodi na određivanje ekstrema funckije $F(x, y, \lambda)$. Stacionarne tačke određujemo iz

$$\begin{aligned} F_x &= f_x - \lambda g_x = 0 \\ F_y &= f_y - \lambda g_y = 0 \\ F_\lambda &= -g(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Dalji postupak je isti kao u slučaju ekstrema sa više promjenljivih kada koristimo Silvesterovo pravilo.

Primjer. Maksimizirati funkciju $f(x,y) = x + y$ na jediničnoj kružnici.

Primjer. Riješiti problem

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \longrightarrow ext$$

$$x + y = 1 \; .$$

Kao što smo rekli, formiramo prvo lagranžijan

$$\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1) \; ,$$

gdje je sa $g(x,y) = x + y - 1$ zadata uslovna funkcija. U drugom koraku računamo gradijent lagranžijana

$$\nabla\Lambda(x,y,\lambda) = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}, \frac{\partial\Lambda}{\partial y}, \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}\right) = (2x - \lambda, 2y - \lambda, x + y - 1) \; .$$

Sada rješavamo sistem

$$\begin{aligned} 2x - \lambda &= 0 \\ 2y - \lambda &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \; . \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednačine sistema imamo $2x = 2y$, tj. $x = y$, pa uvrštavajući to u treću jednačinu, dobijamo $x = y = \frac{1}{2}$ i za ove vrijednosti je $\lambda = 1$. Dakle, imamo jednu stacioarnu tačku $X_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Posljedni korak je utvrdjivanje karaktera tačke X_0. Računajući druge parcijalne izvode, imamo

$$d^2 f(X_0) = 2dx^2 + 2dy^2 \; ,$$

i vidimo da je $d^2 f(X_0) > 0$ (kao suma kvadrata), te dakle imamo minimum funkcije f, pri uslovu g, u tački $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, i on iznosi $f_{min} = \frac{1}{2}$.