1.1 Ekstremne vrijednosti funkcije

1.1.1 Monotonost

Sada nas interesuje da gore isneseno primjenimo na ekonomskim funkcijama, posebno u smislu posmatranja monotonosti i ekstrema funkcije. Posmatrajmo slijedeći primjer:

Primjer. $T(Q) = -Q^2 + 5Q - 6$. Za koje vrijednosti proizvodnje troškovi rastu, a za koje opadaju?

1.1.2 Lokalni ekstremi funkcije

Lokalni ektremi funkcije

Lokalni ektremi su tačke od posebne važnosti za odredjivanje neke funkcije.

Treba razlikovati *lokalne* ekstreme od *apsolutnih* ili *globalnih* ektrema.

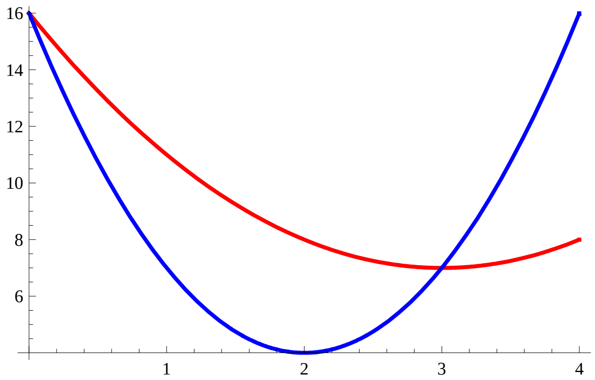
Relativni minimum npr. se postiže u onoj tački u kojoj dolazi do promjene znaka prvog izvoda iz negativnog u pozitivni, dok se relativni maksimum postiže u onoj tački u kojoj dolazi do promjene znaka prvog izvoda iz pozitivnog u negativni.

1.2 Primjena diferencijalnog računa u ekonomiji

Granične/marginalne funkcije u ekonomiji

Granične funkcije u ekonomije su funkcije koje dobijemo iz već znanih pomoću izvoda, tj. granična funkcija je izvod početne funkcije. Dakle

- $GT(Q)$ - funkcija graničnog troška :
$$GT(Q) = T'(Q) = \frac{dT(Q)}{dQ};$$
- $GP(Q)$ - funkcija graničnog prihoda :
$$GP(Q) = P'(Q) = \frac{dP(Q)}{dQ};$$
- $GD(Q)$ - funkcija granične dobiti :
$$GD(Q) = D'(Q) = \frac{dT(Q)}{dQ}.$$



Sjetite se da je izvod u stvari granična vrijednost - stopa promjene za veoma malu promjenu argumenta ($D'(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta Q}$).

Teorem 1.1. *Prosječni troškovi su jednaki graničnim troškovima ako su ti prosječni troškovi minimalni.*

Dakle posmatramo $\bar{T}(Q)$, gdje je $\bar{T}'(Q) = 0$. Odnosno :

$$\bar{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q} \Rightarrow \bar{T}'(Q) = \left(\frac{T(Q)}{Q}\right)' = \frac{Q \cdot T'(Q) - T(Q}{Q^2} = 0.$$

Odavdje slijedi

$$Q \cdot T'(Q) - T(Q) = 0 \Rightarrow QT'(Q) = T(Q) \Rightarrow T'(Q) = \frac{T(Q)}{Q}.$$

Ali po definiciji graničnog troška, imamo

$$GT(Q) = \frac{T(Q)}{Q}.$$

Sa Q^* označčavamo vrijednost za koju je $\bar{T}(Q^*) = \bar{T}_{min}$. Dakle

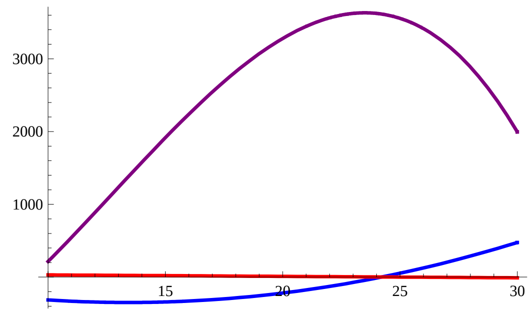
$$\bar{T}(Q^*) = 0 \Rightarrow GT(Q^*) = \bar{T}(Q^*).$$

Primjer. Poznata je funkcija ukupnih troškova $T(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 16Q$.

(a) Odrediti minimalni prosječni trošak;

(b) Odrediti minimalni prosječni trošak koristeći se gornjim teoremom.

Teorem 1.2. *Dobit je maksimalna na nivou proizvedenih i prodatih proizvoda Q_0 na kojem je granični prihod jednak graničnom trošku.*



Dokaz.

$$D(Q) = P(Q) - T(Q) \Rightarrow D'(Q) = P'(Q) - T'(Q) = 0$$
$$\Rightarrow P'(Q^*) = T'(Q^*)$$
$$GP(Q^*) = GT(Q^*)$$

∎

Primjer.

$$T(Q) = Q^2 + 500000, P(Q) = 1500Q.$$

(a) Odrediti funkcije ukupne dobiti i nacrtati grafove funkcije T, P, D.

(b) Odrediti za koje vrijednosti Q se ne ostvaruje gubitak.

(c) Verificirajte rezultat iz teorema.

1.2.1 Elastičnost

Elastičnost

Elastičnost je sposobnost ekonomske veličine y da reaira manjim ili većim intenzitetom na promjene u nekoj drugoj veličini x s kojom je ona u funkcionalnoj međuzavisnosti $y = y(x)$.

Računa se tako da se u omjer stave relativna promjena ekonomske veličine y (tj. $\frac{\Delta y}{y}$ i relativna promjena ekonomske veličine x (tj. $\frac{\Delta x}{x}$).

Tu mjeru označavamo sa

$$E_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}, \tag{1}$$

ali samo pod uvjetom da su promjene Δx i Δy beskonačno male veličine, tj.

$$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$$

Pretpostavimo da je y neprekidna funkcija i kada $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} [y(x+\Delta y) - y(x)] = \lim_{\Delta x\to 0} y(x+\Delta y) - \lim_{\Delta x\to 0} y(x) =$$

$$= y(\lim_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)) - y(x) = y(x) - y(x) = 0.$$

Stoga ako je y neprekidna tada imamo $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$.

Budući da su u formuli (1) veličine Δx i Δy beskonačno male, imamo

$$E_{y,x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

odnosno

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

je mjera ili koeficijent elastičnosti funkcije y u tački x (Marshallova formula).

Ovo je sve uz pretpostavku da je y neprekidna funkcija.

Interpretacija koeficijenta elastičnosti

Pretpostavimo da je x promjenjena za 1%, tj.

$$\frac{\Delta x}{x} = 1\% = \frac{1}{100}.$$

$$E_{y,x} \approx \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100$$

dakle $E_{y,x}$ u tom slučaju predstavlja promjenu ekonomske veličine y u procentima koja nastaje promjenom neovisne veličine x za 1%.

$E_{y,x} > 0 \;\Rightarrow$ povećanje promjene y.

$E_{y,x} < 0 \;\Rightarrow$ smanjenje promjene y. Ako je $|E_{y,x}| < 1$, tada kažemo da je funkcija y neelastična (to znači da 1% promjene veličine x izaziva promjenu veličine y manju od 1% i to smanjenjem ako je $-1 < E_{y,x} < 0$, odnosno povećanjem ako je $0 < E_{y,x} < 1$).

Ako $|E_{y,x}| > 1$, tada kažemo da je funkcija elastična (to znači da 1% promjene x izaziva promjene y veću od 1%.

Ako je $E_{y,x} = 0$ tada je funkcija perfektno neelastična.

Ako $|E_{y,x}| = \infty$, tada je funkcija perfektno elastična.

Ako je $|E_{y,x}| = 1$, tada funkcija y ima jediničnu elastičnost.

Definicija 1.1. Područje elastičnosti funkcije y je skup

$$P_{EL}(y) = \{x | x \in D(y) \ i \ |E_{y,x}| > 1\}.$$

Definicija 1.2. Područje neelastičnosti funkcije y je skup

$$P_{NEEL}(y) = \{x|x \in D(y) \ i \ |E_{y,x}| < 1\}.$$

Primjer. Odrediti koeficijent elastičnosti Paretove funkcije

$$y(x) = \frac{0.4567}{x^{2,3}}.$$

Interpretacija: Vidimo da ovaj koeficijent uopće ne zavisi o veličini x, tj. on je $-2,3$ na svim nivoima. Ako se x poveća za 1% to prouzrokuje smanjenje y za 2.3%.

Generalno govoreći, ako je $y(x) = \frac{A}{x^\alpha}$,

$$E_{y,x} = -\alpha.$$

Primjer. Odrediti koeficijent elastičnosti funkcije

$$y = \frac{2x}{2x-3}$$

i interpretirati rezultat.

Primjer. Izračunati koeficijent elastičnosti funkcije

$$\log y = -0,23 + 0,32 \ \log x.$$

Generalno

$$E_{y,x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)} = \frac{d(\log x)}{d(\log x)}.$$

$$E_{y,x} = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}$$

ako je funkcija u logaritamskom obliku.

Primjer. Odrediti područje elastičnosti i područje neelastičnosti funkcije potražnje $Q(p) = -200p + 1000$ kao funkcije cijene p.

Primjer. Funkcija izdataka za hranu ima oblik

$$y(x) = \frac{19x}{x+96}$$

gdje je x dohodak. Izračunati elastičnost izdatka za hranu prema promjeni dohotka domaćinstva i interpretirati rezultat.

Primjer. Zadana je cijena p kao funkcija proizvodnje Q

$$p(Q) = \frac{1-10Q}{20Q}.$$

Odrediti koeficijent elastičnosti potražnje u odnosu na razini $p = 4$ i interpretirati rezultat.