1.1 Granične vrijednosti

1.1.1 Intuitivni uvod u granične vrijednosti

Uvod

Razvoj diferencijalnog računa stimulisan je od strane dva geometrijska problema:

- nalaženjem površina ravnih površi;
- nalaženjem tangenti na krive.

Oba ove problema zahtjevaju 'granične procese' za svoja opća rješenja.

Međutim koncept limesa ili granične vrijednosti je fundamentalni graditeljski blok na kojem se zasniva cijeli diferencijalni i integralni račun! Na početku ovog poglavlja ćemo promatrati granične procese informalno. Mnogi problemi diferencijalnog i integralnog računa se izvode iz slijedeca tri problema:

Tangentni problem

Ako nam je data funkcija f i tačka $P(x_0, y_0)$ na grafu funkcije, naći jednačinu linije koja je tangentna na graf f u tački p

Površinski problem

Ukoliko nam je data funkcija f, naći površinu ispod grafa funkcije f i intervala $[a, b]$ na x-osi.

Problem trenutne brzine

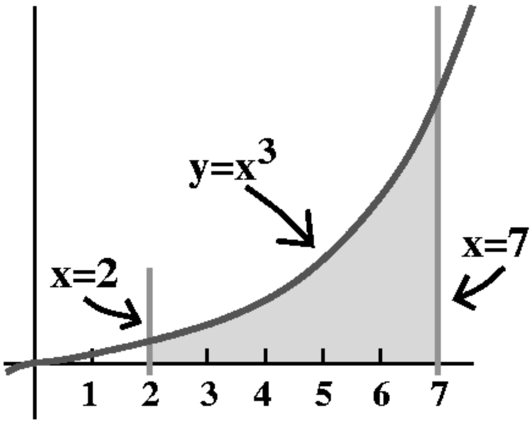
Ukoliko nam je data kriva pozicije u odnosu na vrijeme za česticu koja se kreće duž koordinatne linije, naći brzinu te čestice u datom vremenu.

Promatranje ovih problema ima dugu historiju.

Površinske formule za osnovne geometrijske figure, kao što su pravougaonici, poligoni i krugovi idu nazad do najranijih matematičkih zapisa. Prvi pravi napredak od najprimitivnih pokušaja je napravio starogrčki matematičar *Arhimed* ('$A\rho\chi\iota\mu\eta\delta\eta\varsigma$), koji je razvio genijalnu, ali napornu tehniku, koja se zove *tehnika iscrpljenja*, kako bi našao površine regija koje su ograničene parabolama, spiralama i raznim drugim krivim.

Do 17-og stoljeća mnogi su matematičari otkrili načine kako izračunati ove površine koristeći limese. Međutim, svim ovim metodama je nedostajala generalnost.

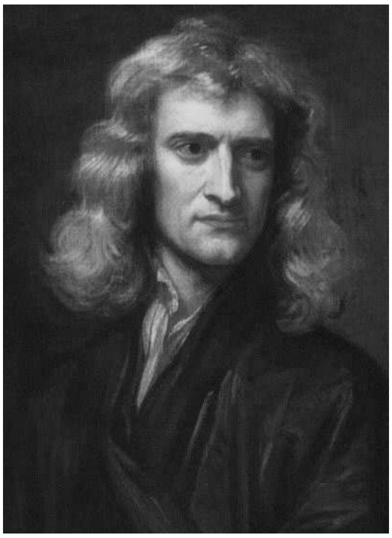
Uvod u površinski problem



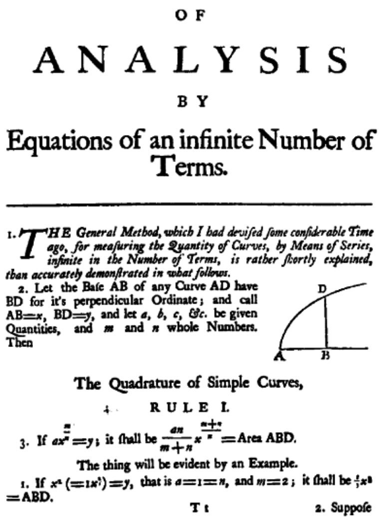
Veliki napredak su napravili nezavisno jedan od drugoga Newton i Leibniz, koji su otkrili da se površine mogu dobiti obrćući proces diferencijacije.

Newtonov rad *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* izdat 1711 se smatra početkom više matematike.

Sir Isaac Newton PRS MP



Gottfried Wilhelm Leibniz



OF

ANALYSIS

BY

Equations of an infinite Number of Terms.

1. *THE General Method, which I had devised some considerable Time ago, for measuring the Quantity of Curves, by Means of Series, infinite in the Number of Terms, is rather shortly explained, than accurately demonstrated in what follows.*

2. Let the Base AB of any Curve AD have BD for it's perpendicular Ordinate; and call AB$=x$, BD$=y$, and let a, b, c, &c. be given Quantities, and m and n whole Numbers. Then

The Quadrature of Simple Curves,

RULE I.

3. If $ax^{\frac{m}{n}}=y$; it shall be $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}=$ Area ABD.

The thing will be evident by an Example.

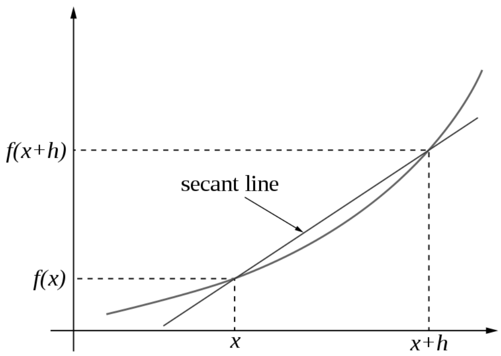
1. If $x^2\ (=1x^{\frac{2}{1}})=y$, that is $a=1=n$, and $m=2$; it shall be $\frac{1}{3}x^3$ $=$ABD.

T t   2. Suppose

Tradicionalno se smatra da matematika koja proizilazi iz tangentnog problema čini diferencijalni račun, dok matematika koja proizilazi iz površinskog problema predstavlja integralni račun.

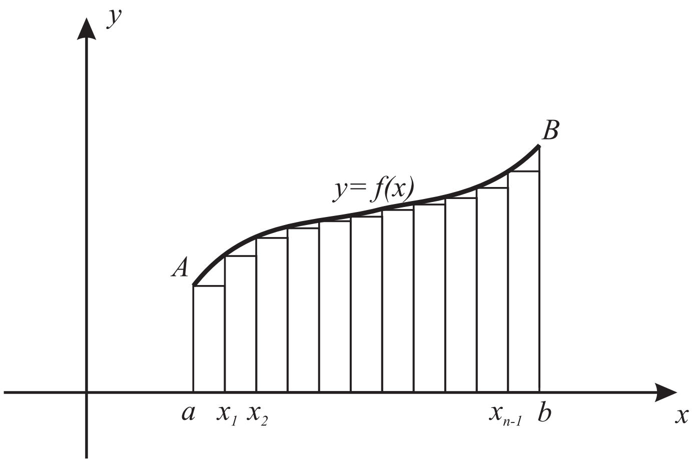
Međutim, vidjet ćemo da su ova dva problema toliko vezani jedan za drugi da je često teško napraviti razliku između diferencijalnog i integralnog računa!

Kako bismo bolje razumjeli gornje probleme, potrebno je da damo precizniju definiciju onoga što smatramo tangentnom linijom, površinom i brzinom.



Tangentne linije i limesi

Površinski problem



Sada kada imamo motivaciju, vrijeme je se pozabavimo samim pojmom granične vrijednosti.

Najosnovnija upotreba limesa je da opišemo kako se funkcija ponaša kada se nezavisna promjenljiva približava odre$\bar{\text{d}}$enoj vrijednosti!

Primjer. Posmatrajmo stoga npr. funkciju $y = 3x + 1$ i različite vrijednosti funkcije za različite argumente

x	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999
y	2,5	3,1	3,4	3,7	3,85	3,97	3,997	3,9997

Očito, kako se argument funkcije približava vrijednosti 1 sa lijeve strane, vrijednost funkcije se približava vrijednosti 4.

Kažemo da funkcija teži vrijednosti 4 kako vrijednost x teži ka 1 (ovaj put s lijeve strane).

x	1,5	1,3	1,2	1,1	1,05	1,01	1,001	1,0001
y	5,5	4,9	4,3	4,6	4,15	4,03	4,003	4,0003

Kažemo da funkcija teži vrijednosti 4 kako vrijednost x teži ka 1 (ovaj put s desne strane).

Ako su desna i lijeva granična vrijednost funkcije jednake, onda kažemo da funkcija ima graničnu vrijenost u toj tački! Intuitivna i veoma neformalna definicija limesa:

Definicija 1.1. Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ mogu napraviti onoliko blizu vrijenosti L koliko želimo, tako što ćemo napraviti x dovoljno blizu vrijednosti a (ali ne jednako vrijednosti a!), onda pišemo

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

što čitamo 'limes funkcije $f(x)$ kada x teži ka a'.

Primjer. Napravite konjekturu o vrijednosti limesa

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Primjer. Napravite konjekturu o vrijednosti limesa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Primjer. Napravite konjekturu o vrijednosti limesa

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}.$$

Lijeva i desna granična vrijednost

Definicija 1.2. Vrijednost $\lim\limits_{\mathbb{R}_a^+\cap D\ni x\to a} f(x)$ označavamo sa $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ ili kraće $f(a+0)$, kad god ta vrijednost postoji i zovemo **desnom graničnom vrijednosti** funkcije f *u tački* a.

Po analogiji se definira i **lijeva granična vrijednost**

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0).$$

Nije teško zaključiti da vrijedi

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = b.$$

Beskonačne granične vrijednosti - informalno

Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ konstantno povećavaju kako se x približava vrijednosti a sa desne ili lijeve strane, onda pišemo

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x \to a-} f(x) = +\infty$$

kako je odgovarajuće i kažemo da se funkcija f *neograničeno povećava* kako x teži ka a sa desne, odnosno lijeve strane.

Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ konstantno smanjuju kako se x približava vrijednosti a sa desne ili lijeve strane, onda pišemo

$$\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty \text{ ili } \lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$$

kako je odgovarajuće i kažemo da se funkcija f *neograničeno smanjuje* kako x teži ka a sa desne, odnosno lijeve strane.

Vertikalna asimptota

Definicija 1.3. Linija $x = a$ se naziva *vertikalna asimptota* grafa funkcije f, ukoliko se $f(x)$ približava $+\infty$ ili $-\infty$ kako se x približava a sa lijeve ili desne strane.

Granične vrijednosti u beskonačnosti i horizontalne asimptote

Do sada smo samo posmatrali granične vrijednosti funkcija kada se x približavalo nekoj konkretnoj vrijednosti a. Međutim, veoma često nas interesuje kako se funkcija ponaša kada vrijednost argumenta neograničeno raste ili opada.

Definicija 1.4 (Granične vrijednosti u beskonačnosti - informalno)**.** Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više i više približavaju nekom broju L kako se argument x neograničeno povećava, onda pišemo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više i više približavaju nekom broju L kako se argument x neograničeno smanjuje, onda pišemo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Geometrijski, ako se $f(x) \to L$ kako $x \to +\infty$, onda se graf funkcije eventualno sve više i više približava horizontalnoj liniji $y = L$ (kada graf pomatramo u pozitivnom smjeru).

Slično, ako se $f(x) \to L$ kako $x \to -\infty$, onda se graf funkcije eventualno sve više i više približava horizontalnoj liniji $y = L$ (kada graf pomatramo u negativnom smjeru).

Definicija 1.5 (Horizontalna asimptota)**.** Linija $y = L$ naziva se *horizontalna asimptota* grafa funkcije f ako $f(x) \to L$ kako $x \to +\infty$ ili $x \to -\infty$.

Definicija 1.6 (Beskonačne granične vrijednosti u beskonačnosti - informalno)**.** Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više i više povećavaju kako se argument x neograničeno povećava ili smanjuje, onda pišemo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad ili \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više i više smanjuju kako se argument x neograničeno povećava ili smanjuje, onda pišemo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad ili \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Također granična vrijednost u beskonačnosti može da uopće ne postoji ukoliko funkcija beskonačno oscilira na takav način da se vrijednost funkcije ne približava nijednoj vrijednosti, niti se neograničeno povećavaju niti smanjuju.

Takve su na prijer trigonometrijske funkcije $\sin$ i $\cos$. U tom slučaju kažemo da graničnna vrijednost ne postoji zbog oscilacije.

Izačunavanje limesa

Deset standardnih graničnih vrijednosti će formirati osnovu za izračunavanje graničnih vrijednosti. Tri uključuju konstantnu funkciju, tri uključuju linearnu funkciju, dok četiri uključuju racionalnu funkciju.

$$\lim_{x\to a} k = k, \quad \lim_{x\to+\infty} k = k, \quad \lim_{x\to-\infty} k = k,$$

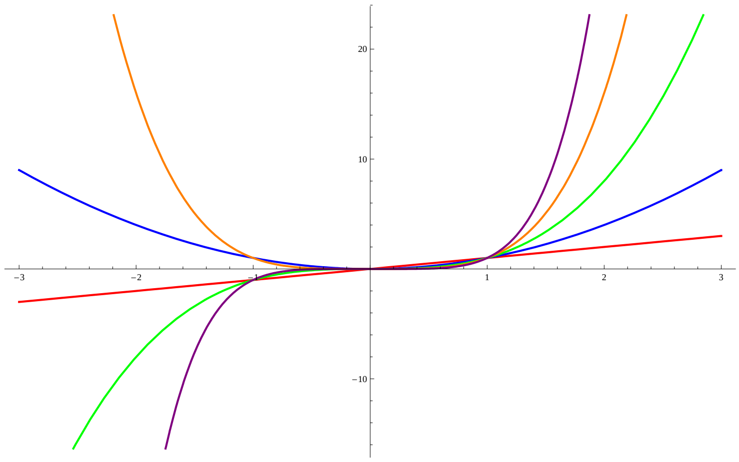
$$\lim_{x\to a} x = a, \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Osobine granične vrijednosti funkcije

Neka $\lim$ označava jednu od graničnih vrijednosti $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a^-}$, $\lim_{x\to a^+}$, $\lim_{x\to+\infty}$, ili $\lim_{x\to-\infty}$. Pretpostavimo da postoje granične vrijednost funkcije $L_1 = \lim f(x)$ i $L_2 = \lim g(x)$. Tada

1. $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim(x) = L_1 + L_2$
2. $\lim k \cdot f(x) = k \cdot \lim f(x) = k \cdot L_1$ $(k \in \mathbb{R})$
3. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = L_1 dot L_2$



4. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, (L_2 \neq 0)$
5. $\lim [f(x)]^k = (\lim f(x))^k = L_1^k,\ (k \in \mathbb{R})$.

Primjer. Izračunati:

1. $$\lim_{x\to 1}(2x^2 - 5x + 10)$$
2. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}$$
3. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$$

Za svaki polinom

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

i za bilo koji realan broj a,

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a) = c_0 + c_1 a + \cdots + c_n a^n$$

A šta je s polinomima oblika x^n u beskonačnosti? Pogledajmo sliku!

Množenje sa pozitivnom brojem ništa ne mijenja, dok množenje sa negativnim brojem mijenja znak beskonačnosti. Također možemo posmatrati granične vrijednosti funkcija definisanih dio po dio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, & x > 3 \end{cases}$$

1.1.2 Granična vrijednost funkcije

Granična vrijednost funkcije

Do sada se sva diskusija zasnivala na intuitivnoj predodžbi šta to znači da se vrijednost funkcije sve više i više približava nekoj graničnoj vrijednosti.

Sada se konačno možemo i trebamo, pozabaviti problemom granične vrijednosti formalnije. Stoga posmatrajmo funkciju za koju $f(x) \to L$ kako $x \to a$.

Ako $f(x) \to L$ kako $x \to a$, onda za bilo koji pozitivan broj ε, možemo naći otvoreni interval na x-osi koji sadrži tačku $x = a$ i ima osobinu da za svako x u tom intervalu, osim možda u $x = a$ vrijednost funkcije $f(x)$ je između $L - \varepsilon$ i $L + \varepsilon$.

Definicija 1.7 (Formalna definicija limesa)**.** Neka je funkcija $f(x)$ definisana za svako x u nekom otvorenom intervalu koji sadrži broj a, sa mogućim izuzetkom u samom a. Onda ćemo pisati

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ako za bilo koji dati broj $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad ako \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Definicija 1.8. $+\infty$ je granična vrijednost funkcije $y = f(x)$ u tački a ako vrijedi da za svako $M > 0$ postoji δ koje zavisi od M takvo da čim je x iz $O_\delta(a)$, imao da je $f(x) > M$, tj.

$$(\forall M > 0)(\exists \delta = \delta(M) > 0) \quad x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) > M.$$

Za $-\infty$, imamo

$$(\forall M < 0)(\exists \delta = \delta(M) > 0) \quad x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) < M.$$

L je granična vrijednost funkcije $y = f(x)$ kada $x \to +\infty$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M = M(\varepsilon) > 0) \quad x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

L je granična vrijednost funkcije $y = f(x)$ kada $x \to -\infty$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M = M(\varepsilon) < 0) \quad x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

1.2 Neprekidnost

Neprekidnost

Objekt koji se kreće ne može (ma koliko mi to možda željeli u stilu sci-fi filmova) tek tako samo nestati i pojaviti se na drugom mjestu. Stoga ukoliko put objekta u kretanju posmatramo kao krivu, on aje neprekidna, bez rupa, skokova ili prekida.

Ranije smo razmatrali neprekidnost informalno. Međutim, taj pogled je i više nego dobar, kao što vidimo iz definicije

Definicija 1.9. Funkcija f je *neprekidna u tački* c ukoliko su zadovoljeni slijedeći uslovi:

1. $f(c)$ je definisana.
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ postoji.
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ukoliko je jedan ili više od navedenih uslova nezadovoljen, kažemo da funkcija f ima prekid u tački c.

Ako je f neprekidna u svakoj tački intervala (a, b) onda kažemo da je funkcija neprekidna na intervalu (a, b).

Ukoliko je funkcija neprekidna na intervalu $(-\infty, \infty)$ onda kažemo da je svuda neprekidna.

Primjetite da su prva dva uslova suvišni!

Primjer. Odrediti da li su slijedeće funkcije neprekidne u tački $x = 2$:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Neprekidnost u primjenama

U primjenama, prekidi obično signaliziraju pojave važnih fizikalnih fenomena.

S obzirom da prekidi imaju značajne fizikalne interpretacije, važno je da smo u mogućnosti identificirati tačke prekida specifičnih funkcija i da smo u mogućnosti napraviti opća tvrđenja o osobinama neprekidnosti cijelih familija funkcija. Uobičajeni pristup da pokažemo da je funkcija neprekidna je da pokažemo da je neprekidna u nekoj *proizvoljnoj* tački. Na primjer, kao što smo vijeli ranije, ako je $p(x)$ polinom i ako je a proizvoljan realni broj da

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

Stoga, imamo slijedeći rezultat:

Teorem 1.1. *Polinomi su svugdje neprekidni.*

Primjer. Pokazati da je funkcija $|x|$ svuda neprekidna.

Osobine neprekidnih funkcija

Teorem 1.2. *Ukoliko su funkcije f i g neprekidne u tački c, onda*

- *$f + g$ je neprekidna u c;*
- *$f - g$ je neprekidna u c;*
- *$f \cdot g$ je neprekidna u c;*
- *$\frac{f}{g}$ je neprekidna u c ako je $g(c) \neq 0$, a ima prekid u c ako je $g(c) = 0$.*

Teorem 1.3. *Racionalna funkcija je neprekidna svuda osim u tačkama gdje je imenioc jednak nuli.*

Primjer. Za koje vrijednosti x imamo rupu u grafu funkcije $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$?

Neprekidnost kompozicija

Ako $\lim$ označava jednu od graničnih vrijednosti $\lim_{x\to c}$, $\lim_{x\to c^-}$, $\lim_{x\to c^+}$, $\lim_{x\to+\infty}$ ili $\lim_{x\to-\infty}$. Ako je $\lim g(x) = L$ a funkcija f je neprekidna u tački L, onda je

$$\lim f(g(x)) = f(L).$$

To jest,

$$\lim(f(g(x))) = f(\lim g(x)).$$

Drugim riječima, znak granične vrijednosti može zamijeniti mjesto sa znakom funkcije, ukoliko je funkcija neprekidna i ukoliko postoji granična vrijednost izraza unutar funkcije.

Primjer. Ispitati neprekidnost funkcije $|5 - x^2|$.

Teorem 1.4.
1. *Ako je funkcija g neprekidna u tački c i ako je funkcija f neprekidna u tački $g(c)$, onda je u kompozicija funkcija $f \circ g$ neprekidna u tački c.*
2. *Ako je funkcija g neprekidna svuda i ako je funkcija f neprekidna svuda, onda je u kompozicija funkcija $f \circ g$ neprekidna svuda.*

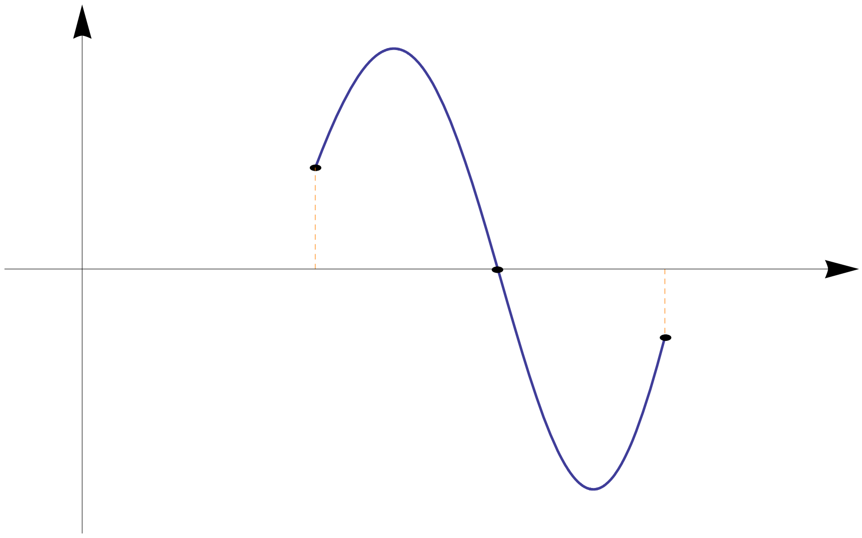
Stoga na osnovu prethodnog primjera zaključujemo na primjer da je apsolutna vrijednost neprekidne funkcije neprekidna funkcija!

Teorema srednje vrijednosti

Teorem 1.5. *Ako je f neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i ako e k bilo koji broj između $f(a)$ i $f(b)$ (inkluzivno), onda postoji najmanje jedan broj x na intervalu $[a, b]$ takav da je $f(x) = k$.*

Posljedica 1.1. *Ako je f neprekidna na $[a, b]$ i ako su $f(a)$ i $f(b)$ različiti od nule i suprotnog znaka, ona postoji najmanje jedno rješenje jednačine $f(x) = 0$ u intervalu (a, b).*

Primjer. Naći rješenje (približno) realno jednačine $x^3 - x - 1 = 0$.



Neprekidnost trigonometrijskih funkcija

Teorem 1.6. *Ako je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan broj u domeni specificirane trigonometrijske funkcije, onda*

$$\lim_{x\to c} \sin x = \sin c, \ \lim_{x\to c} \cos x = \cos c, \ \lim_{x\to c} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c,$$

$$\lim_{x\to c} \csc x = \csc c, \ \lim_{x\to c} \sec x = \sec c, \ \lim_{x\to c} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} c.$$

Teorem stezanja/sendvič/lopovi i policajci

Teorem 1.7. *Ako su f, g i h funkcije koje zadovoljavaju nejednakosti*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)),$$

za sva x u nekom otvorenom intervalu koji sadrži tačku c, sa mogućim izuzetkom u samoj tački c. Ako g i h imaju istu graničnu vrijednost kako se x približava c, recimo

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} = h(x) = L,$$

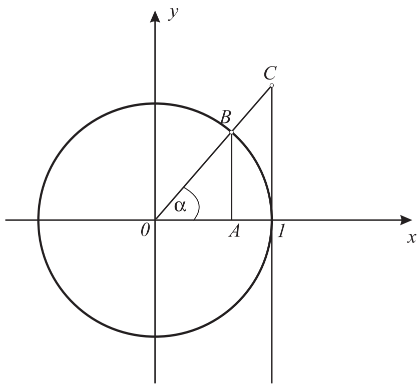
onda i f mora imati istu graničnu vrijednsot kako se x priližava c, tj.

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Primjedba. Ova teorema također vrijedi i za beskonačne granične vrijednosti.

Primjer. Dokazati da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 1.$$



Primjena limesa u ekonomiji

Zadana je cijena p kao funkcija potražnje d:

$$p(d) = \frac{d+1}{d-2}$$

Izrazite potražnju kao funkciju cijene i izračunajte $\lim_{p\to+\infty} d(p)$.

Neki standardni limesi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

odakle smjenom $\frac{1}{x} = t$ dobijamo

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Primjer. Izračunati

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Primjer.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$