1.1 Definicija funkcije

Realna funkcija predstavlja osnovni pojam u matematičkoj analizi i centralni objekat svih njenih razmatranja.

Definicija

Neka je dat skup $D \subseteq \mathbb{R}$. Ako je svakom $x \in D$ po nekom zakonu (pravilu) pridružen jedan i samo jedan $y \in \mathbb{R}$, tada kažemo da je na skupu D definirana ***realna funkcija*** *$f$realne promjenljive x . Pravilo po kojem se vrši pridruživanje označavamo sa f, odnosno*

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

Ovdje je x argument ili nezavisno promjenljiva, a skup D (često se i D_f) je *definiciono područje* ili ***domen funkcije*** f**.**

Broj y_0, pridružen vrijednosti x_0 argumenta x, zove se vrijednost funkcije u tački $x = x_0$ i označava se $f(x_0)$. Skup svih vrijednosti funkcije f označava se R_f i zove se ***kodomen funkcije*** f.

Ako nije unaprijed dato definiciono područje funkcije f, onda se podrazumijeva da je to maksimalan skup za čije elemente x funkcija $f(x)$ ima smisla.

Definicija 1

Neka je $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ binarna relacija i neka D_f označava skup svih prvih komponenti uređenih parova $(x, y) \in f$.

Ako relacija f zadovoljava uslov da se svaki $x \in D_f$ pojavljuje samo jednom kao prva komponenta svih uređenih parova iz f, tj. ako

$$(\forall x \in D_f) : \quad (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2,$$

onda skup $f$nazivamo ***realnom funkcijom*** *na skupu $D_f \subseteq \mathbb{R}$.*

Funkcija se može zadati na razne načine, ali je najzanimljiviji slučaj kad se funkcija zadaje putem nekog ***analitičkog izraza*** $f(x)$– kojim se propisuju pravila pridruživanja elementima skupa D_f– elemenata kodomena R_f. Funkcija

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 2}{7x}} \tag{1}$$

je primjer gdje je $f(x)$ eksplicitno dato u funkciji od argumenta x. Inače, analitički funkcija može biti zadana, osim ovog tzv. ***eksplicitnog*** načina i parametarski. Naime, nekad se promjenljiva x i promjenljiva y mogu zadati u funkciji nekog realnog parametra t. Neka je

$$x = \phi(t) \quad ; \quad y = \psi(t), t \in A \subseteq \mathbb{R},$$

gdje su ϕ i ψ realne funkcije definirane na istome podskupu $A \subseteq \mathbb{R}$.

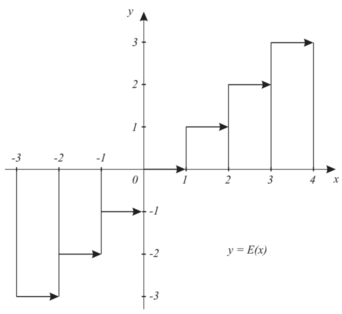
Relacijom $\Phi(x, y) = 0$, često, može biti zadata funkcija

$$y = f(x),$$

ili funkcija $x = g(y)$. Naprimjer, izrazom $7xy^3 - 3x^2 - 2 = 0$ je takođe zadata i realna funkcija (1). Često se funkcija zadaje bez ikakve formule.

Takav je primjer funkcije $E(x)$– "cijeli dio broja x" (ili *cjelobrojno* x). Nije teško uočiti da za *cjelobrojno* x vrijedi

$$E(2) = 2,\ E(3,5) = 3,\ E(\sqrt{13}) = 3,\ E(-\tfrac{\pi}{2}) = -2, ...$$



Osim analitičkog, zadavanje funkcije f može biti ***tabelarno*** i ***grafičko***.

Tabelarno se funkcija zadaje u prilikama kad je moguće vrijednosti nezavisno promjenljive x i zavisno promjenljive (tj. funkcije) y ispisati u jednoj tabeli, tako da se može uočiti funkcionalna zavisnost $y = y(x)$.

Prisjetimo se ovdje linearne funkcije $y = ax + b$. Ona se, uz napomenu da se radi o linearnoj funkciji, može tabelarno predstaviti sa samo dva para vrijednosti (x_i, y_i).

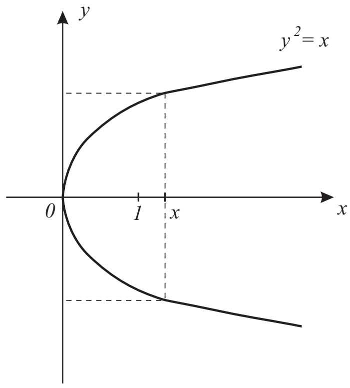
x	x_0	x_1
y	$ax_0 + b$	$ax_1 + b$

Definicija 2.

Grafik funkcije *$y = f(x)$ je skup*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x \in D_f \wedge y = f(x)\}.$$

Svaki podskup u $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ne može biti grafik funkcije. Da bi neki skup $A \subset \mathbb{R}^2$, bio grafik jedne funkcije, potrebno je i dovoljno, da svaka prava paralelna sa y- osom, siječe skup A najviše u jednoj tački.



Naime, u definiciji funkcije f iz skupa X u skup Y, zahtjeva se da svakome $x \in X$ pridružimo jedan i samo jedan element $y \in Y$. Drugim riječima, svaka funkcija je po konvenciji jednoznačno preslikavanje, tj.,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2. \tag{2}$$

U nizu slučajeva može se odrediti grafik funkcije $y = F(x)$, transformacijom već poznatog grafika druge funkcije $y = f(x)$. Neke od jednostavnijih primjera takvih transformacija dajemo u sljedećoj tabeli.

Funkcija	***Transformacija grafika funkcije***
$y = F(x)$	$y = f(x)$
$y = f(x) + \alpha$ $y = f(x + \alpha)$	*Pomak (shift) duž Oy ose za α* *Pomak duž apscisne ose za α*
	udesno ako je $\alpha < 0$, ulijevo ako je $\alpha > 0$
$y = f(-x)$	*Simetrija u odnosu na osu ordinata*
$y = -f(x)$	*Simetrija u odnosu na apscisnu osu*
$y = \alpha f(x)$	*Homotetija tačaka $f(x)$na ordinati*
$y = f(\alpha x)$	*Homotetija tačaka x na apscisi*

1.1.1 Neke klase realnih funkcija

Sve osobine koje posjeduju funkcije mogli bi podijeliti na lokalne i globalne, pa prema tim svojstvima se i izdvajaju klase realnih funkcija. Preciznije, reći ćemo da je neko svojstvo globalno za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ ako ono vrijedi (po definiciji) na čitavome skupu $A \subseteq D_f$, nasuprot lokalnog svojstva koje vrijedi (takođe, po definiciji) samo u okolini tačke skupa $A \subseteq D_f$.

Za neki skup D kažemo da je *simetričan skup*, ako vrijedi

$$x \in D \quad \Rightarrow -x \in D.$$

Očigledno da se ovdje radi o simetriji skupa D u odnosu na tačku 0.

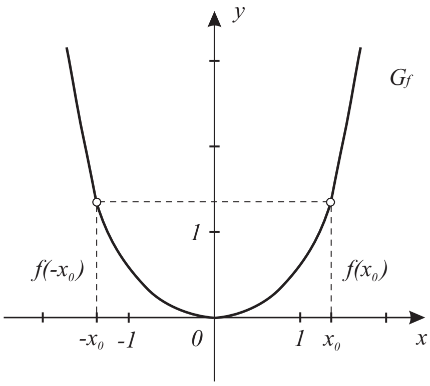
Definicija 3

Funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$, definirana na simetričnom skupu $D_f \subseteq \mathbb{R}$, je ***parna na skupu*** *D_f* ***,*** *ako vrijedi*

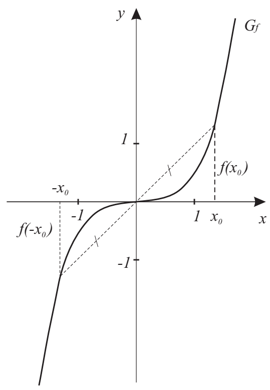
$$(\forall x \in D_f) f(x) = f(-x);$$

a ***neparna na*** *D_f ako je*

$$(\forall x \in D_f) f(-x) = -f(x).$$



Slika 2.4, a



Slika 2.4, b

Primjer. Polinom parnih stepena

$$p(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n},$$

je primjer parne funkcije koja je definirana na simetričnom skupu $D_p = \mathbb{R}$.

Primjer. $f(x) = \sin x$**,** koja je definirana na $\mathbb{R}$ **,** primjer je neparne funkcije.

Većina funkcija nema svojstvo parnosti niti neparnosti. Sa druge strane, lako se pokazuje da se svaka funkcija f definirana na simetričnom skupu $X \subseteq \mathbb{R}$, može predstaviti u obliku sume

$$f(x) = h(x) + s(x)$$

jedne parne i jedne neparne funkcije. To se postiže sabiranjem funkcija h i s, koje su zadate pomoću

$$h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \; s(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)),$$

od kojih je očigledno prva parna, a druga neparna funkcija.

Definicija 4

Funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ je ograničena sa donje strane na skupu $X \subseteq D_f$, ako postoji $m \in \mathbb{R}$, tako da je za svako $x \in X, f(x) \geq m.$ Simbolički

$f : X \to \mathbb{R}$ **je ograničena na** X**sa donje strane** ako

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in X)(f(x) \geq m)$$

Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je ograničena sa gornje strane na skupu $X \subseteq D_f$ ako postoji $M \in \mathbb{R}$, tako da je za svako $x \in X, f(x) \leq M$. Drugim riječima, funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ **je ograničena na** X **sa gornje strane** ako

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X)(f(x) \leq M).$$

Definicija 5. Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$, kažemo da je **perodična,** ako postoji broj ω(perioda) takav da vrijedi

$$(\forall x \in D_f)(x + \omega \in D_f)(f(x + \omega) = f(x)). \tag{3}$$

Klasu tih funkcija (ako je $D_f = (a, b)$) označićemo sa $\mathcal{P}_{(a,b)}$. Inače periodičnost je prisutna i u prirodi u mnogim njenim pojavama; primjeri su: godišnja doba, noć-dan, plima-oseka, mjesečeva svjetlost i sl.

Definicija 1.1. Realna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ naziva se:

rastućom na razmaku $A \subseteq D$, ako

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2));$$

strogo rastućom na razmaku A, ako

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2));$$

opadajućom na razmaku $A \subseteq D$, ako

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2));$$

strogo opadajućom na razmaku A, ako

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Za svaku od ovih funkcija f reći ćemo da je **monotona funkcija** na razmaku definiranosti ako je $A = D_f$; pišemo $f \in \mathcal{M}_A$.

Dakako, osobina monotonosti je globalno svojstvo funkcije.

Primjer. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ nije monotona na $D = [-1, +1]$.

Definicija 1.2. Realna funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ je **ograničena na skupu** $A \subseteq D_f$**,** ako je $\{f(x)\,|x \in A\}$ ograničen skup. Drugim riječima, ako

$$(\exists M \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in A)(|f(x)| \leq M). \qquad (*)$$

Ako je funkcija f ograničena na skupu A, pišemo $f \in \mathcal{B}_A$. Dakle, ograničenost funkcije na D_f je globalno svojstvo te funkcije.

1.1.2 Osobine funkcija

1. Ako funkcija $f : A \mapsto B$ ima osobinu da su *svi* elementi skupa B slike elemenata skupa A, onda kažemo da funkcija f ima osobinu *sirjektivnosti* ili da je *preslikavanje "na"*.

2. Ako funkcija $f : A \mapsto B$ ima osobinu da različitim originalima odgovaraju različite slike, (tj. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$), kažemo da funkcija f ima osobinu *injektivnosti*, ili da je f *preslikavanje jedan-na-jedan*.

Definicija 1.3. Ako funkcija $f : A \mapsto B$ jeste i injekcija i sirjekcija, onda kažemo da je funkcija f *bijekcija*.

Graf funkcije f odreÐujemo tako da

1. Odredimo $\mathcal{D}_f$;

2. Za svako $x \in \mathcal{D}_f$ odredimo $y = f(x)$;

3. u koordinatni sistem xOy unesemo sve tačke $(x, f(y))$.

1.1.3 Elementarne funkcije

Elementarne funkcije

Primjer. Linearna funkcija $y = kx + l$.

Primjer. Kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$.

Primjer. Racionalna funkcija $y = \frac{1}{x}$.

Primjer. Korjenska funkcija $y = \sqrt{x}$.

Primjer. Eksponencijalna funkcija $y = a^x \quad a > 0 \ i \ a \neq 1$.

Primjer. Logaritamske funkcije $y = \log_a x$.

Definiciono područje

Primjer. Odrediti definiciono područje funkcije

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \log(1-x).$$

Kompozicija funkcija

Neka su date dvije funkcije $f : A \mapsto B$ i $g : B \mapsto C$. Onda funkciju $h : A \mapsto C$ definisanu sa

$$h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

nazivamo *kompozicijom funkcija* f i g.

Primjer. Neka su date funkcije $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)$ i $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 6$. Odrediti $g \circ f$ i $f \circ g$.

1.1.4 Inverzna funkcija

Inverzna funkcija

Neka je data funkcija $f : A \mapsto B$ koja je *bijekcija*. Onda postoji njena *inverzna* funkcija koja se označava sa f^{-1} i $f^{-1} : B \mapsto A$, za koju vrijedi da

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Kako odrediti inverznu funkciju? Kod polinomskih i racionalnih funkcija je to dosta jednostavno - slika i original samo zamjene mjesta!

Primjer.

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

$$f(x) = y = 2x - 4.$$

Primjer. Naći inverzne funkcije:

1. $y = \frac{2x-1}{x+2}$;
2. $Q_d(P) = -a + bP$;
3. $y = a^x$;
4. $y = x^2$.

1.2 Primjena funkcija u ekonomiji

Već smo vidjeli neke primjere funkcija u ekonomiji :

$$Q_d(P) = a - bP, \quad Q_s(P) = -c + dP$$

Primjer. Odnos cijena i ponude neke robe dat je tabelom: Odrediti i grafički prikazati funkciju ponude oblika

$$s(p) = ap^2 + bp + c, \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

p	1	2	3
s	10	8	4

Primjer. Zadana je cijena p kao funkcija ponude s. Izraziti ponudu s kao funkciju cijene p ako je

$$p(s) = \frac{1}{2}\sqrt{s^2 + 2s + 5} + 2$$

$$\sqrt{s^2 + 2s + 5} = 2p - 4 /\,^2 \Rightarrow s^2 + 2s + 5 = (2p - 4)^2$$

$$\Rightarrow s^2 + 2s + 1 = (2p - 4)^2 - 4 \Rightarrow (s + 1)^2 = (2p - 6)(2p - 2)/\sqrt{}$$

$$\Rightarrow s + 1 = \sqrt{2(p - 3)(p - 1)} \Rightarrow s(p) = \sqrt{2(p - 3)(p - 1)} - 1$$

pod uslovom da je $p \geq 3$.

1.2.1 Funkcija troškova

Funkcija troškova

Ekonometrijski model koji se koristi kako bi se analizirali troškovi je model u kojem glavna promjenljiva predstavlja ukupne troškove, a endrogene promjenljive predstavljaju faktore koji utiču na njihov nivo.

Kvantitet proizvodnje je najvažniji faktor koji utiče na ukupni nivo troška!

Funkcija može imati različite forme, može npr. biti linearna ili polinomska - ali je u najvećem broju praktičnih slučajeva polinomska funkcija trećeg reda. Ukupni troškovi se sastoje od dva sastavna dijela, naime

1. fiksni troškovi - koji ne zavise od procesa proizvodnje (amortizacija, plate, režije, itd.)
2. varijabilni troškovi - zavise o količini proizvodnje i mijenjaju se s porastom ili padom proizvodnje!

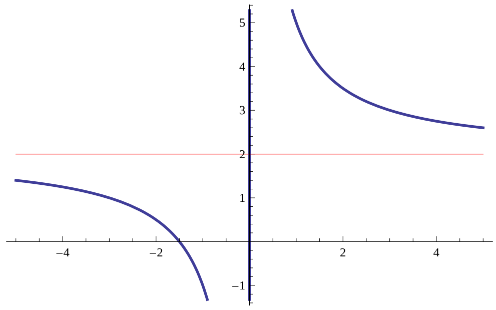
Funkciju ukupnih troškova označavamo sa $T(Q)$, gdje Q predstavlja potražnju, tj. ponudu.

$$T(Q) = FT + VT(Q).$$

Budući da vidimo da su fiksni troškovi fiksni i ne zavise od proizvodnje, lako se vidi da je:

$$Q = 0 \Rightarrow VT(0) = 0 \Rightarrow T(0) = FT!$$

Primjer. $T(Q) = 3 + 5Q$



1.2.2 Prosječni trošak

Prosječni trošak

Prosječni (ili unitarni) trošak treba da predstavlja trošak proizvodnje jednog proizvoda i označava se sa $\overline{T}(Q)$.

Stoga je očito da će prosječni trošak biti ukupni trošak podijeljen sa brojem proizvedenih artikala, tj.

$$\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q}.$$

Primjer. Ako je ukupni trošak neke proizvodnje 10000KM, a proizvede se 385 artikala, koliki je prosječni trošak?

Primjer. Zadana je funkcija troškova nekog preduzeća $T(Q) = 2Q + 3$, gdje je Q količina proizvodnje. Izvedite graf funkcije prosječnih troškova. Za koje količine proizvodnje Q funkcija troškova i prosječnog troška imaju ekonomskog smisla?

1.2.3 Funkcije prihoda i dobiti

Funkcija prihoda

Koliki je prihod neke kompanije? Pa naravno da će (optimalno) biti jednak količini proizvodnje/potražnje pomnožene sa cijenom proizvoda!

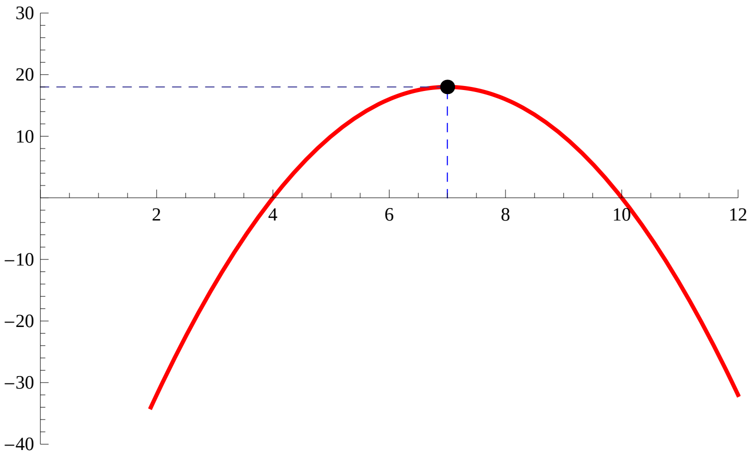
$$P = Q \cdot p.$$

Postavlja se pitanje, čega je dobit funkcija? Pa očito, cijene!

$$P(p) = Q(p) \cdot p.$$

Međutim, kako je uobičajeno u analizi troškova, funkcije trebaju ovisiti o proizvodnji, ne o cijeni! Stoga, prvo nađemo inverznu fukciju $p(Q)$ iz $Q(p)$! Stoga

$$P(Q) = Q \cdot p(Q).$$



Funkcija dobiti

Kako izraziti ono najvažnije, tj. funkciju dobiti?

Očito - dobit je prihod minus trošak!

$$D(Q) = P(Q) - T(Q).$$

Primjetite - za razliku od troškova i prihoda, dobit može biti negativna!

Primjer. Date su funkcije potražnje $Q(p) = -p + 20$ i prosječnih troškova $\overline{T}(Q) = Q - 8 + \frac{80}{Q}$. Odrediti:

1. funkciju dobiti $D(Q)$ i grafik funkcije dobiti;
2. potražnju za koju je dobit jednaka nuli;
3. interval renatbilne proizvodnje;
4. maksimalnu moguću dobit i nivo potražnje na kojoj se ostvaruje.