## 1.1 Primjena sistema LAJ u ekonomiji

Analitički proces opisan na prethodnom predavanju će biti primjenjen na nešto što zovemo *statička analiza* ili *analiza ekvilibrijuma*.

Stoga prvo moramo shvatiti što to uopće predstavlja ekvilibrijum.

### 1.1.1 Ekvilibrijum

**Ekvilibrijum**

Kao bilo koji ekonomski termin, ekvilibrijum možemo definisati na više različitih načina.

Po jednoj definiciji, ekvilibrijum je *konstelacija odabranih međusobno povezanih promjenljivih, podešenih tako u odnosu jedne na drugu da ne postoji tendencija ka promjeni unutar sistema koji sačinjavaju*.

Dakle, esencijalno ekvilibrijum za specificirani model predstavlja situaciju koju karakteriše manjak tendencije ka promjeni.

Zbog toga se analiza ekvilibrijuma (odnosno proučavanje kakvo je to stanje ekvilibrijuma) često naziva *statika*. Činjenica da ekvilibrijum nema tendencije ka promjeni bi nekoga naveo na pomisao da ekvilibrijum obavezno predstavlja najpoželjnije i idealno stanje stvari, zasnovano na ideji da u savršenom stanju nema potrebe niti motivacije za promjenom. Ovakvo razmišljanje je *bez osnova*.

Iako određeni ekvilibrijum može predstavljati poželjno stanje (kao što je stanje maksimalne dobiti u okviru neke kompanije), neki drugi ekvilibrijum je nešto što je negativno i što treba izbjeći – kao što je recimo permanentno visoka stopa nezaposlenosti u Bosni i Hercegovini!

### 1.1.2 Linearni model parcijalnog tržišnog ekvilibrijuma

**Linearni model parcijalnog tržišnog ekvilibrijuma**

U statičnom – ekvilibrijum modelu, standardni problem je pronalaženje skupa vrijednosti endrogenih promjenljivih koji bi zadovoljavao uslov ekvilibrijuma našeg modela.

Ovo ćemo ilustrovati na parcijalnom ekvilibrijum – tržišnom modelu, tj. modelu određivanje cijene na izolovanom tržištu.

**Konstrukcija modela**

Kako ćemo posmatrati samo jednu vrstu robe, dovoljno je da imamo samo tri promjenljive, naime:

- cijenu robe $P$;
- količina potražnje, tj. prodane robe $Q_d$
- količina ponude $Q_s$.

Sada moramo postaviti naš uslov ekvilibrijuma : standardna pretpostavka je da se ekvilibrijum na tržištu uspostavlja ako i samo ako nema viška potražnje, tj.

$$Q_d - Q_s = 0 \quad \Rightarrow Q_d = Q_s.$$

No ovo odmah postavlja pitanje kako određujemo samo $Q_d$ i $Q_s$?.

Za $Q_d$ pretpostavljamo da je linearna *opadajuća* funkcija cijene $P$ (tj. što je veća cijena, to je manja potražnja).

Za $Q_s$ pretpostavljamo da je linearna *rastuća* funkcija cijene $P$ (tj. što je veća cijena, to je veća ponuda).

Također pretpostavljamo da nema ponude ukoliko cijena ne dosegne određeni minimalni nivo. Sve u svemu, model će sadržati jedan uslov ekvilibrijuma plus dva uslova ponašanja koji upravljaju potražnjom i ponudom respektivno.

### Matematički model

Prevedeno u matematički jezik, model izgleda ovako

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_s \\ Q_d &= a - bP \quad (a, b > 0) \\ Q_s &= -c + dP \quad (c, d > 0). \end{aligned} \tag{1}$$

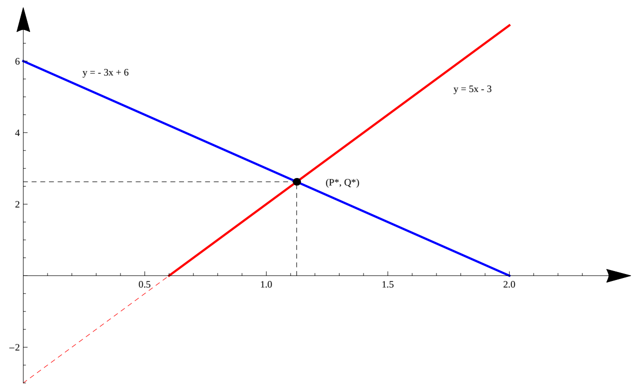
Naša $4$ parametra $a, b, c, d$ su pozitivni. Već primjetimo da funkcija potražnje ima negativan nagib $-b < 0$, dok funkcija ponude ima pozitivan nagib $d > 0$. Međutim, vertikalni presjek funkcije ponude je negativan. Zašto? Sada, iz našeg sistema (1), lako rješavanjem vidimo da je

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{(jer je } b + d > 0.$$

Primjetite da sada ovu cijenu ekvilibrijuma označavamo sa $\overline{P}$ i da je vrijednost pozitivna, kako cijena i treba biti. Sada trebamo izračunati vrijednost ekvilibrijuma $\overline{Q} = \overline{Q}_d = \overline{Q}_s$

$$\overline{Q} = a - b\overline{P} = a - b\frac{a+c}{b+d} = \frac{ad - bc}{b+d}.$$

Budući da je brojilac pozitivan i imenilac mora biti pozitivan. Stoga vidimo da imamo još jedan uslov kako bi naš model bio smislen, odnosno $ad > bc$. Vrlo je već dobro




Slika 1: Funkcije ponude i potražnje za konkretne $a = 6, b = 3, c = 3, d = 5$

znano da se $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ tržnog modela mogu odrediti grafički kao presjek krivih potražnje i ponude.

Dakle tržišni ekvilibrijum se ostvaruje u

$$(\overline{P}, \overline{Q}) = \left( \frac{a+c}{b+d}, \frac{ad-bc}{b+d} \right)$$

što je rješenje sistema (1) i očito, ekvilibrijum je jedinstven, kao što bismo i očekivali.

### 1.1.3 Opći model tržišne ravnoteže

**Općeniti model tržišne ravnoteže**

Maloprije smo se bavili izolovanim tržištem, gdje su $Q_d$ i $Q_s$ nekog proizvoda funkcije cijene samo og proizvoda. U stvarnom svijetu međutim, nijedan proizvod se ne ponaša na takav hermetički način. Realističniji opis funkcije potražnje nekog proizvoda bi trebao uzeti u obzir i cijene povezan proizvoda. Sada pretpostavimo da imamo $n$ različitih roba. Dakle promjenljive su

$$Q_{d_1}, Q_{d_2}, \ldots, Q_{d_n}$$

$$Q_{s_1}, Q_{s_2}, \ldots, Q_{s_n}$$

Uslovi ekvilibrijuma su

$$Q_{d_1} = Q_{s_1},\ Q_{d_2} = Q_{s_2}, \ldots$$

Na primjer, model s dvije robe:

$$\begin{aligned} Q_{d_1} &= Q_{s_1} \\ Q_{d_1} &= a_1 + b_1 P_1 + c_1 P_2 \\ Q_{s_1} &= a_2 + b_2 P_1 + c_2 P_2 \\ Q_{d_2} &= Q_{s_2} \\ Q_{d_2} &= \alpha_1 + \beta_1 P_1 + \gamma_1 P_2 \\ Q_{s_1} &= \alpha_2 + \beta_2 P_1 + \gamma_2 P_2 \end{aligned}$$

O predznacima koeficijenata nećemo diskutovati! Sistem se svede na

$$\begin{aligned} (b_1 - b_2)P_1 + (c_1 - c_2)P_2 &= a_2 - a_1 \\ (\beta_1 - \beta_2)P_1 + (\gamma_1 - \gamma_2)P_2 &= \alpha_2 - \alpha_1 \end{aligned}$$

Koristimo na primjer Cramerov metod, te izračunamo $D, D_1, D_2$.

Kako znamo da je tačka ravnoteže jedinstvena, slijedi da sistem mora imati jedinstveno rješenje, tj. $D \neq 0$, odnosno

$$(b_1 - b_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \neq (c_1 - c_2)(\beta_1 - \beta_2).$$

$$\overline{P_1} = \frac{(a_2 - a_1)(\gamma_1 - \gamma_2) - (c_1 - c_2)(\alpha_2 - \alpha_1)}{(b_1 - b_2)(\gamma_1 - \gamma_2) - (c_1 - c_2)(\beta_1 - \beta_2)}$$

$$\overline{P_2} = \frac{(b_1 - b_2)(\alpha_2 - \alpha_1) - (a_2 - a_1)(\beta_1 - \beta_2)}{(b_1 - b_2)(\gamma_1 - \gamma_2) - (c_1 - c_2)(\beta_1 - \beta_2)}$$

Treba voditi računa o tome da treba biti $\overline{P_1} > 0, \overline{P_2} > 0, \overline{Q_1} > 0, \overline{Q_2} > 0$ i o vezi koeficijenata koji se pri tome dobiju!

**Primjer.**

$$\begin{aligned} Q_{d_1} &= 10 - 2P_1 + P_2 \\ Q_{s_1} &= -2 + 3P_1 \\ Q_{d_2} &= 15 + P_1 - P_2 \\ Q_{s_2} &= -1 + 2P_2 \end{aligned}$$

Rješenje je $P_1 = \frac{26}{7}, P_2 = \frac{46}{7}$.

### 1.1.4 Model nacionalnog dohotka

#### Ekvilibrijum u modelu nacionalnog dohotka

Iako je diskusija o ekvilibrijumu bila do sada ograničena na tržišne modele, naravno da ekvilibrijum ima primjene i u drugim oblastima ekonomije. Kao jednostavan primjer, možemo promatrati Keynesov model nacionalnog dohotka:

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= a + bY \quad (a > 0,\ 0 < b < 1). \end{aligned}$$

Ovdje $Y$ i $C$ predstavljaju endrogene promjenljive nacionalnog dohotka i potrošnje respektivno, dok $I_0$ i $G_0$ predstavljaju investiciju i potršnju vlade. Također su nam unaprijed poznater veličine $a$ i $b$.

$a$ predstavlja autonomnu potrošnju, dok je $b$ granična sklonost potrošnji. Prva jednačina je uslov ekvilibrijuma (nacionalni dohodak je jednak nacionalnoj potrošnji).

Druga jednačina je jednačina ponašanja. Cramerovo pravilo nas odmah dovodi do rješenja

$$Y^* = \frac{I_0 + G_0 + a}{1 - b}, \quad C^* = \frac{a + b(I_0 + G_0)}{1 - b}.$$

### 1.1.5 Input-output analiza

**Input-output analiza**

U svojoj statičkoj verziji, input-output analiza Prof. Leontiefa se bavi slijedećim pitanjem:

*Koji nivo outputa bi svaka od $n$ različitih industrija trebala proizvoditi, tako da bi to bilo dovoljno da se zadovolji ukupna potražnja za tim proizvodom?*

Racionalitet input-output analize je očit. Output mnogih industrija (kao što je na primjer čelik) je input mnogih drugih industrija, ili čak same početne industrije! Stoga bi "korektan" nivo proizvodnje čelika zavisio od input potreba svih industrija gdje se čelik koristi, a s druge strane outputi raznih drugih industrija će se koristiti kao inputi u industriji čelika i konzekventno će "korektni" nivoi outputa drugih proizvoda zavisiti barem djelimično od potreba industrije čelika.

Očito je stoga da je input-output analiza od velikog značaja prilikom planiranja proizvodnje, kao na primjer prilikom planiranja ekonomskog razvoja neke zemlje ili programa narodne odbrane. Stoga ćemo sada u input-output analizi posmatrati $n$-sektora industrije, $I = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Sa $Q_i$ označavamo ukupnu količinu outputa $i$-tog sektora ($i \in I$).

Sa $Q_{ij}$ označavamo količinu outputa iz $i$-tog sektora neophodnog za proces proizvodnje u $j$-tom sektoru ($i, j \in I$).

$q_i$ je finalna potražnja outputa $i$-tog sektora.

*Pretpostavka.* $Q_i$ treba potrošiti ili na međusektorsku potražnju $Q_{ij}$ ili na finalnu potražnju $q_i$.

**Uslov ekvilibrijuma**

Pretpostavit ćemo da je potrošnja jednaka potražnji, dakle

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{11} + Q_{12} + \ldots + Q_{1n} + q_1 \\ Q_2 &= Q_{21} + Q_{22} + \ldots + Q_{2n} + q_2 \\ &\ldots \\ Q_n &= Q_{n1} + Q_{n2} + \ldots + Q_{nn} + q_n \end{aligned} \tag{2}$$

Ovaj sistem (2) sada možemo napisati obliku koji nazivamo input-output tabela:

**Input-output tabela**

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | | | | | $q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_1$ | $Q_{11}$ | $Q_{12}$ | $Q_{13}$ | $\ldots$ | $Q_{1n}$ | $q_1$ |
| $Q_2$ | $Q_{21}$ | $Q_{22}$ | $Q_{23}$ | $\ldots$ | $Q_{2n}$ | $q_2$ |
| $\vdots$ | | | $\vdots$ | | | $\vdots$ |
| $Q_n$ | $Q_{n1}$ | $Q_{n2}$ | $Q_{n3}$ | $\ldots$ | $Q_{nn}$ | $q_n$ |

Sistem (2) je sistem jednačina ekvilibrijuma. Sistem (2) sadrži $n$ jednačina sa $n^2 + 2n$ nepoznatih.

U našem razmatranju pretpostavit ćemo da se tehnološki uvjeti ne mijenjaju.

Ovo znači da imamo konstantnu količinu proizvoda iz $i$-tog sektora neophodnih za proizvodnju jedne jedinice u $j$-tom sektoru. Označimo tu količinu sa $a_{ij}$. Kako je izračunati? Prosto:

$$a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j} \quad \Rightarrow \quad Q_{ij} = a_{ij} Q_j$$

Pretpostavimo stoga da imamo tehničke norme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ako ove koeficijente zamijenimo u sistem (2), dobijemo

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \ldots + a_{1n}Q_n + q_1 \\ Q_2 &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \ldots + a_{2n}Q_n + q_2 \\ &\ldots \\ Q_n &= a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \ldots + a_{nn}Q_n + q_n \end{aligned}$$

Ovaj sistem možemo napisati u matričnoj formi:

$$Q = AQ + q, \tag{3}$$

gdje su

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Prilikom planiranja proizvodnje, gdje ćemo se služiti ovim modelom, moguće su slijedeće situacije:

1. Poznat nam je vektor outputa svih sektora $Q$ (novi plan proizvodnje).
2. Poznat nam je vektor finalne potražnje $q$.
3. Za neke sektore ekonomije poznata nam je količina njihovih outputa, a za preostale njihova finalna potražnja.

**Slučaj 1.**

Pretpostavimo da nam je poznat vektor $Q$ - trebamo stoga odrediti $q$ i $Q_{ij}$ (međusektorska potrošnja). Iskoristimo matričnu jednačinu (3) :

$$Q = AQ + q \Rightarrow q = Q - AQ \Rightarrow q = (I - A)Q$$

Matricu $T = (I - A)$ nazivamo matricom tehnologije. Stoga nova matrica ukupnih outputa je

$$q = T \cdot Q$$

Novu međusektorsku potrošnju računamo pomoću ranije formule $Q_{ij} = a_{ij} Q_j$, zbog pretpostavke da se tehnološki uvjeti ne mijenjaju.

**Primjer.** Pretpostavimo da je ekonomija jedne zemlje podijeljena na 3 sektora i da I-O tablica izgleda:

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | | | $q_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 300 | 30 | 40 | 100 | 130 |
| 400 | 60 | 120 | 100 | 120 |
| 500 | 60 | 160 | 150 | 130 |

Sastaviti novu I-O tablicu koja odgovara novom planu proizvodnje:

$$Q_1 = 360,\ Q_2 = 480,\ Q_3 = 600,$$

ako je poznato da se tehnološki uvjeti nisu promjenili.

Prvo izračunamo matricu $A$, tj.

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Izračunamo matricu tehnologije

$$T = I - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Izračunamo $q = T \cdot (360, 480, 600) = (156, 144, 156)$ Upišimo ovo u novu IO tabelu:

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | $q_i$ |
|---|---|---|
| 360 | | 156 |
| 480 | | 144 |
| 600 | | 156 |

Ostalo je samo još da izračunamo međusektorsku proizvodnju, što računamo iz matrice $A$ i formule $Q_{ij} = aij \cdot Q_j$.

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | | | $q_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 360 | 36 | 48 | 120 | 156 |
| 480 | 72 | 144 | 120 | 144 |
| 600 | 72 | 192 | 180 | 156 |

**Slučaj 2.**

Sada nam je poznata $q$, a trebamo odrediti $Q$ i međusektorsku potražnju $Q_{ij}$.

$$q = T \ \cdot \ Q \qquad \backslash\, T^{-1} \text{ (s lijeva)}$$

$$T^{-1} \cdot q = T^{-1} T \cdot Q \qquad \Rightarrow \qquad Q = T^{-1} \cdot q$$

Međusektorsku proizvodnju računamo kao i prije.

**Primjer.** Zadana je I-O tablica dvosektorske ekonomije

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | | $q_i$ |
|---|---|---|---|
| | 600 | 1200 | 600 |
| | 1200 | 1200 | 1200 |

Najprije popuniti tablicu, a zatim odrediti novu I-O tablicu ako se finalna potražnja prvog sektora poveća za $10\%$, a drugog smanji za $10\%$.

IO tabela je

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | | $q_i$ |
|---|---|---|---|
| 2400 | 600 | 1200 | 600 |
| 3600 | 1200 | 1200 | 1200 |

Novi vektor finalne potražnje je stoga $q = (660, 1080)$. Izračunamo metricu $A$, tj.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Inverzna matrica matrice tehnologije je

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{27}{16} \end{pmatrix}$$

Pomnožimo ovu matricu sa novim vektorom finalne potražnje kako bismo dobili novi vektor ukupne proizvodnje $Q = (1800, 2070)$. Popunimo novu IO tablicu

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | $q_i$ | $Q_i$ | $Q_{ij}$ | | $q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1800 | | 660 | 1800 | 450 | 690 | 660 |
| 2070 | | 1080 | 2070 | 300 | 690 | 1080 |

**Slučaj 3.**

**Primjer.** Pretpostavimo da je ekonomija neke zemlje podijeljena na $3$ sektora. I-O tablica izgleda

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | | | $q_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 300 | 30 | 40 | 100 | 130 |
| 400 | 60 | 120 | 100 | 120 |
| 500 | 60 | 160 | 150 | 130 |

Sastaviti novu I-O tablicu ako se pretpostavlja da će ukupna proizvodnja biti $Q_1 = 330, q_2 = 132, q_3 = 143$. Tehnološki uvjeti se neće promijeniti.

U ovom, trećem slučaju, nema kratica, već moramo istinski riješiti sistem jednačina. Opet, kao i prije, prvo izračunamo matricu $A$:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Vratimo se jednačini (3), tj. jednačini $q = T \cdot Q$, odnosno

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ 132 \\ 143 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 330 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ 132 \\ 143 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 297 - 0,1Q_2 - 0,2Q_3 \\ -66 + 0,7Q_2 - 0,2Q_3 \\ -66 - 0,4Q_2 + 0,7Q_3 \end{pmatrix}$$

Tako dobijamo sistem od 3 jednačine sa 3 nepoznate:

$$\begin{aligned} q_1 + 0,1Q_2 + 0,2Q_3 &= 297 \\ 0,7Q_2 - 0,2Q_3 &= 198 \\ -0,4Q_2 + 0,7Q_3 &= 209 \end{aligned}$$

ili vjerovatno jednaostavnije

$$\begin{aligned} 10q_1 + Q_2 + 2Q_3 &= 2970 \\ 7Q_2 - 2Q_3 &= 1980 \\ -4Q_2 + 7Q_3 &= 2090 \end{aligned}$$

Iz zadnje dvije jednačine dobijemo $Q_2 = 440, Q_3 = 550$. Stoga, iz prve jednačine dobijamo $q_1 = 143$. Stoga je nova IO-tabela:

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | $q_i$ |
|---|---|---|
| 330 | | 143 |
| 440 | | 132 |
| 550 | | 143 |

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | | | $q_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 330 | 33 | 44 | 110 | 143 |
| 440 | 66 | 132 | 110 | 132 |
| 550 | 66 | 176 | 165 | 143 |