1.1 Uvod u matematičku ekonomiju

1.1.1 Pojam matematičke ekonomije

- Matematička ekonomija nije odvojena grana ekonomije kao što su to npr. javne finansije ili internacinalna trgovina. Ona je *pristup* ekonomskoj analizi.
- Najveća razlika izmed̄u 'matematičke ekonomije' i 'eksplicitne ekonomije' je u tome što se u prethodnoj pretpostavke i zaključci iznose u obliku matematičkih simbola, a ne riječi; k tomu još se koristi matematičkim teoremama u procesu rezonovanja.

Prednost matematičkog modela je u slijedećem:

- Jezik koji koristimo je precizniji i koncizniji;
- Cijelo bogatstvo matematičkih teorema nam je na raspolaganju;
- Tjera nas da navedemo sve naše pretpostavke eksplicitno;
- Možemo se posvetiti opštem slučaju sa n-promjenljivih.

- Matematički jezik je postao dominantan u mnogim sferama ekonomije : rečenice tipa '10-postotno povišenje cijena sirove nafte dovodi do 5-postotnog pada prodaje benzina' su nam (nažalost) i više nego dobro znane!
- Iako je ekonomija društvena nauka, razlika izmedju društvenog i naučnog aspekta ove nauke je sve manja i manja.
- Izraz matematička ekonomija se često miješa sa ekonometrijom. Ovo nije tačna pretpostavka. Ekonometrija se pretežno bavi mjerenjem ekonomskih podataka, dok matematička ekonomija daje alate za manipulaciju istim.
- Trudit ćemo se da vam u ovom semestru pokažemo što više matematike koja će vam *doista* koristiti kao ekonomistima!

1.1.2 Matematika/kalkulator

Zašto matematika, a ne kalkulator?

- Postoji uvriježeno mišljenje da je matematika ekonomistima nepotrebna, jer svejedno kalkulatori i računari mogu sve da urade za nas.
- Ovo *nije* istina.
- I računarski programeri moraju znati šta rade i alat bez pozadinskog znanja ne vrijedi ništa.

- TEST: pokušajte uraditi nešto konkretno u nekom programskom paketu a da ne koristite svoje već stečeno srednjoškolsko matematičko znanje.
- Cilj ovog kursa je da vas osposobi da *sve* alate možete dobro i korisno da iskoristite!
- Kao vrlo jednostavan test gore navedenog pokušajte sa svojim 'digitronom' izračunati slijedeće:
$$16 - 3 \cdot 4 - 1 =?$$
- Koji ste rezultat dobili? 3? 7? 51? 39?
- Kalkulator ne misli za vas i nikada ga nemojte koristiti na taj način!
- Usput budi rečeno, tačan odgovor je 3. ;)
- Naravno da su kalkulatori vrlo korisni u mnogim slučajevima, no *oprez*.
- Za slijedeći primjer, posmatrajmo relaciju:
$$q = 1.200 - 10p.$$
- Šta treba biti kvantitet q ako je cijena p jednaka 150?
- Računar bi dao odgovor -300, što je dakako glupost, jer ne možemo imati negativan kvantitet *ničega*!
- Kako je za $p = 120$, $q = 0$, onda to znači da za svaku cijenu iznad 120, $p = 130$ na primjer, opet moramo imati $q = 0$!
- Ovaj primjer ilustruje kako ne smijemo automatski uzimati svaki računarski odgovor zdravo za gotovo!

1.1.3 Aritmetika

Osnovne operacije

- Naravno da pretpostavljamo da ste upoznati sa operacijama sabiranja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, pa stoga vam nećemo vrijeđati inteligenciju dajući primjere iz tih osnovnih aritmetičkih operacija!
- Ili možda ipak hoćemo? :)
- $$\begin{aligned} 24 + 204 &= 228 \\ 9089 - 393 &= 8696 \\ 12 \cdot 24 &= 288 \\ 4448 : 16 &= 278 \end{aligned}$$
- Koristite digitron!!!

Pravila aritmetičkih operacija

- PRVO : množenje i dijeljenje, pa onda sabiranje i oduzimanje!
- DRUGO: pravilo s lijeva na desno!

$$60 : 6 \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20$$

a ne

$$60 : 6 \cdot 2 = 60 : 12 = 5$$

- Naravno uvijek možete koristiti zagrade!

- Primjer : Ako neka firma proizvede 220 komada svog proizvoda po proizvodnoj cijeni od $8,25KM$ i proda ih po cijeni od $9,95KM$, koliki je profit?

-

$$\begin{aligned} \text{profit po komadu} &= 9,95 - 8,25 \\ \text{ukupni profit} &= 220 \cdot (9,95KM - 8,25KM) \\ &= 220 \cdot 1,70KM \\ &= 374KM \end{aligned}$$

1.1.4 Procentni račun

- Decimalni prikaz je samo drugačiji način prikazivanja razlomaka

-

$$0,1 = \frac{1}{10}$$
$$0,01 = \frac{1}{100}$$
$$0,234 = \frac{234}{1000}$$

- U matematici se decimalni format pretežno koristi za stvari koje se u svakodnevnom životu izražavaju kao *procenti*. Na primjer, kamatne stope se pretežno prikazuju u procentima!

- Format procenata je samo drugačiji način prikazivanja decimalnog razlomka:

$$62\% = \frac{62}{100} = 0,62.$$

- Dakle, ako državi moramo dati 43% poreza na svoju platu koja (kad završite fax!) iznosi 2345 KM, kolika nam je neto plata?

- Samo izvedemo slijedeću operaciju:

$$\text{porez } = \left(\frac{43}{100} =\right) 0,43 \cdot 2345 = 1008,35.$$

$$\text{plata neto } = 2345 - 1008,35 = 1336,65.$$

- Vidimo da je računanje procenata doista samo čisti razlomački račun iz petog razreda osnovne škole!

-
$$24\% = 0,24 \quad 0,24\% = 0,0024$$
$$24,56\% = 0,2456 \quad 2,4\% = 0,024\text{itd...}$$

- Pretvaranje procenata u decimale će te morati na primjer raditi sa kamatnim stopama kada budete učili o metodama ocjene investicija i o drugim aspektima finansijske matematike.

- Ukratko, NON-STOP!

- Stoga, oprezno, koristite se svojim kalkulatorima dakako!

- Dakako, jedna važna stvar koju će te morati raditi je zaokruživanje. Uobičajeno je zaokruživanje na najmanje dva decimalna mjesta. Npr, ako trebate da izračunate $1/7$ neke vrijednosti, onda računate $14,29\%$ te vrijednosti.

Vježbe iz procentnog računa

- Koliko iznosi milimetar kao decimalni oblik: centimetra, metra i kilometra?

- Prikažite slijedeće procente u decimalnom obliku:

$$45,2\%; \quad 243,15\%; \quad 7,5\%; \quad 0,2\%.$$

- Kada je vlada Velike Britanije privatizovala vodovod 1989. godine, odlučila je da će godišnje procentualno povećanje cijene vode biti ograničeno razinom inflacije plus z, gdje je z cifra koju će odrediti vlada. Napišite algebarski izraz za maksimalno godišnje povišenje cijene vode i izračunajte povišenje kada je rata inflacije 6% a faktor z jednak 3. Ako je cijena vode po litru 1990. godine bila $4,3$ penija, kolika će biti 1991. po gornjim parametrima?

Vježbe iz procentnog računa

- Ako su voda, hljeb, mlijeko, šećer i kafa 2000. godine koštali respektivno $0,80;\ 1;\ 1,45;\ 2,15;\ 4,20$ a 2001. godine $0,95;\ 1,20;\ 1,55;\ 2,55;\ 5,05$, kolika je prosječna stopa inflacije (u procentima) za 2000-tu godinu za te osnovne proizvode?

1.2 Skupovi

Skup je jednostavno kolekcija različitih objekata. Ovi objekti mogu biti brojevi ili nešto sasvim drugo.

Npr. svi studenti prve godine ekonomije se mogu smatrati jednim skupom, isto kao što parni brojevi $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ formiraju skup.

Postoje dva načina prikazivanja skupova: *enumeracijom* i *deskripcijom*.

Skup pozitivnih cijelih brojeva možemo prikazati kao

$$\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

ili kao

$$\mathbb{Z}^+ := \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}.$$

- Kao drugi primjer, skup A svih cijelih brojeva većih od 2, a manjih od 6 se može predstaviti kao
$$A = \{3, 4, 5\},$$
ili kao
$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < x < 6\}.$$
- Skup sa ograničenim brojem elemenata se zove *konačan skup*, inače je *beskonačan*.
- Pripadnost skupu se označava sa simbolom $\in$. Dakle $3 \in \{2, 3, 4\}$. Nepripadnost skupu se označava sa $\notin$, npr. $3 \notin \{4, 5, 6\}$.

1.2.1 Odnosi među skupovima

Odnosi među skupovima se predstavljaju simbolima

$$=, \subset, \subseteq, \supset, \supseteq$$

Primjetite da dok se $\in$ prikazuje odnos elementa i skupa, npr. $\subset$ prikazuje odnos između dva skupa!

Dok je npr. $3 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Koliko podskupova skupa {1,2,3} možemo formirati? To su

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Da li nešto zaboravljamo? *Prazan skup* je podskup *svakog skupa*!

- Generalno, ako skup ima n elemenata, onda on ima 2^n podskupova.
- Jako je bitno razlikovati slijedeće: $\emptyset$ i $\{0\}$.

- Još bitnija je razlika između $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$!!!
- Ako dva skupa nemaju zajedničkih elemenata, onda se oni zovu *disjunktni*.

1.2.2 Operacije na skupovima

- *Unija* dva skupa je skup koji sadrži sve elemente ta dva skupa, dakako bez ponavljanja!
$$A = \{1, 3, 5, 6\},\ B = \{2, 4, 6\},\ A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
- *Presjek* dva skupa je skup koji sadrži sve zajedničke elemente ta dva skupa.
$$A = \{1, 3, 5, 6\},\ B = \{2, 4, 6\},\ A \cap B = \{6\}.$$
- *Razlika* dva skupa je skup koji sadrži sve elemente skupa A koji nisu u skupu B
$$A = \{1, 3, 5, 6\},\ B = \{2, 4, 6\},\ A \setminus B = \{1, 3, 5\}.$$
Primjetite da je $B \setminus A = \{2, 4\}$!

Uvedimo sada pojam *univerzalnog skupa*. Ako posmatramo realne brojeve, onda o tome skupu možemo razmišljati kao o skupu svih realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Onda možemo definisati *komplement* A^c nekog skupa A, kao skup svih elemenata uinverzalnog skupa koji nisu u skupu A.
$$A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},\ U = \mathbb{Z},\ A^c = \{0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}.$$

1.2.3 Zakoni operacija na skupovima

- Komutativni zakoni:
$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$
- Zakoni asocijacije:
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$
- Zakoni distribucije:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Provjerite zakone asocijacije i distribucije na skupovima:
$$A = \{4, 5\}, B = \{3, 6, 7\}, C = \{2, 3\}.$$

Algebra i jednačine

- Algebra je u osnovi način zapisivanja stvari na kraći način. Koristimo simbole kako bi prikazali koncepte i promjenljive koje mogu uzimati razne vrijednosti.
- Jednostavan (linearni) primjer:

$$x + 4 = 12.$$

- Ako lijepite keramičke pločice u WC-u, gdje su pločice površine $10\ cm^2$. Broj kvadratnih metara koje morate popločati je još uvijek neznan i označen je sa q. Pošto će te razbiti određen broj pločica i sjeći ih kako biste pokrili ćoškove, morate kupiti dovoljno pločica da pokrijete površinu plus 10%. Napišite izraz koji određuje koliko pločica y morate kupiti kako biste pokrili kupatilo u odnosu na q.