Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 18/09/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [1]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]

(b) Formulišite i dokažite *Frenetove jednačine*. [7]

(c) Neka je $F = (T, N_1, N_2)$ prilagodjeni okvir i neka je $\tilde{F} = FA$, gdje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sa nekom funkcijom $t \mapsto \varphi(t)$. Uvjerite se da je $\tilde{F}$ još jedan prilagodjeni okvir. Zatim izračunajte kako se strukturne jednačine (tj., κ_1, κ_2 i τ) mijenaju. [10]

Zadatak 2.

(a) Pretpostavite da je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta je *prva fundamentalna forma* I površi $\mathbf{x}$? [1]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna*. [1]

(b) Neka $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ parametrizira površ revolucije; nadjite uslove za r i h kako bi $\mathbf{x}$ bila konformalna površ. [3]

(c) Pokažite da je površ $\Sigma_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ minimalna površ. [6]

(d) Nadjite konformalnu parametrizaciju za

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z^2 < 1\}.$$

Provjerite rezultat! [9]

Zadatak 3.

(a) Navedite i *dokažite Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. Navedite sve pomoćne rezultate koje budete koristili. [2+4]

(b) Neka je $(u, v) \mapsto \xi(u, v)$ tangencijalno vektorsko polje duž para–metrizovane površi $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$.

(i) Definišite *kovarijantni izvod* (u, v) u pravcu (λ, μ) ovog vektorskog polja. [3]

(ii) Definišite *Christoffelove simbole.* [2]

(c) Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ paramterizacija linijom krivine površi sa konstantnom Gauss -ovom krivinom $K \equiv -1$ tako da, bez gubitka generalnosti, $\kappa_1 = \tan\varphi$ i $\kappa_2 = -\cot\varphi$ sa odgovarajućom funkcijom φ. Pokažite da postoji reparametrizacija linijom krivine, $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$, tako da

$$\tilde{\mathrm{I}} = \cos^2\varphi \, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi \, d\tilde{v}^2 \quad \text{i} \quad \tilde{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi \, (du^2 - dv^2).$$

(Pomoć: pokažite da je $(\frac{E}{\cos^2\varphi})_v = (\frac{G}{\sin^2\varphi})_u = 0$ iz Codazzijevih jednačina.) [9]