Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 19/06/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4(x^2 + y^2) = 1 + z^2, z = 2x + 1\}$.

(a) Napišite C kao bazni skup, tj. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0\}$, sa dvije odgovarajuće funkcije F_1 i F_2; zatim

(i) provjerite da C definiše regularnu krivu tako što ćete pokazati da su gradijenti $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$; [2]

(ii) nadjite regularnu parametrizaciju za krivu. [4]

(b) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva, $T = \gamma'$, sa $T'(s) \neq 0$ za sva s.

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ, kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$. [2]

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$. [2]

(c) Nadjite krivinu (do znaka) i torziju krive date u (a). [5]

(d) Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizovana kriva i neka je $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ repara – metrizacija krive γ (ne obavezno dužinom luka). Pokažite da je, za sva s,

$$\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(s)$$

(**Pomoć**: Razmislite o koeficijentima koje trebate prije računanja!) [5]

Rješenje.

(a)

(i) Uzmimo $F_1(x, y, z) := 4x^2 + 4y^2 - z^2 - 1$ i $F_2(x, y, z) := 2x - z + 1$;
Onda $\nabla F_1(x, y, z) \times \nabla F_2(x, y, z) = -4(2y, z - 2x, 4y) = -4(2y, 1, 4y) \neq 0$ jer je $z = 2x + 1$;
stoga su $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$.
Teorema implicitnog preslikavanja sada osigurava da je C regularna kriva.

(ii) Posmatrajmo $0 = F_1(x, y, 2x + 1) = 4y^2 - 4x - 2$, što daje $x = y^2 - \frac{1}{2}$;
stoga $t \mapsto \gamma(t) := (t^2 - \frac{1}{2}, t, 2t^2)$ daje regularnu parametrizaciju jer je $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t) \neq 0, \forall t$.

(b)

(i) Krivina: $\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s) = |T'(s)|$.
Torzija: $\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s))$

(ii) γ je parametrizirana dužinom luka, $|\gamma'|^2 \equiv 1$, tako da $\gamma'' \perp \gamma'$;
onda $|\gamma' \times \gamma''|^2 = |\gamma'|^2 |\gamma''|^2 = |\gamma''|^2 = |T'|^2 = \kappa^2$.

(c) Računamo $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t)$ i $\gamma''(t) = (2, 0, 4)$ tako da $\kappa = \frac{|(4,0,-2)|}{|(2t,1,4t)|^3} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{1+20t^2}^3}$; jer je γ planarna kriva, $\tau = 0$.

(d) Računamo

$$\tilde{\gamma}'(s) = t'(s)\gamma(t(s))$$
$$\tilde{\gamma}''(s) = t'^2(s)\gamma''(t(s)) + ?\gamma'(t(s))$$

tako da je $\frac{|\tilde{\gamma}'\times\tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma'(t(s))\times\gamma''(t(s))|^2 t'^{(2\cdot 3)}(s)}{|\gamma'(t(s))|^6 t'^6(s)} = \frac{|\gamma'\times\gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(t(s))$.

Zadatak 2. Neka je $(u,v)\mapsto \mathbf{x}(u,v)$ regularna površ sa prvom i drugom fundamentalnom formom I i $\mathrm{I\!I}$.

(a) Pokažite da postoji jedinstveno polje linearnih preslikavanja $\mathrm{S}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (*operator oblika*), tako da

$$\mathrm{I\!I}(.,.) = \mathrm{I}(.,\mathrm{S}.);$$

Pokazati da je S simetrično u odnosu na I, tj., $\mathrm{I}(.,\mathrm{S}.) = \mathrm{I}(\mathrm{S}.,.)$. [5]

(b) Definišite precizno pojam *geodezije*. Dokažite da geodezija mora imati konstantnu brzinu. [5]

(c) Neka je površ $(u,v)\mapsto \mathbf{x}(u,v)$ parametrizirana sa $\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$. Pokažite da je kriva $\beta(t) = \mathbf{x}(t,0)$ geodezija površi $\mathbf{x}$. [3]

(d) Neka je $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ cilindar na krivoj u (x,y)-ravni. Dokažite da je geodezija na Σ (opšti) heliks.
. [7]

Rješenje.

(a) Ako napišemo fundamentalne forme u matričnoj formi,

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathrm{I\!I} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

spozaćemo da $\mathrm{I\!I}(.,.) = \mathrm{I}(.,S.)$ ako i samo ako

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} Ge-Ff & Gf-Fg \\ Ef-Fe & Eg-Ff \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simetrija S u odnosu na I prati direktno:

$$\mathrm{I}(\mathrm{S}.,.) - \mathrm{I}(.,\mathrm{S}.) = \mathrm{S}^t\mathrm{I} - \mathrm{I}\mathrm{S} = \mathrm{I\!I}^t - \mathrm{I\!I} = 0$$

jer je druga fundamentalna forma simetrična.

(b) Neka je $t\mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t),v(t))$ kriva i neka je $t\mapsto \xi(t)$ vektorsko polje duž γ tangentno na površ; neka je $t\mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t),v(t))$.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\xi := \xi' - (\xi'\cdot N)\,N$$

će se zvati <u>kovarijantni izvod</u> od ξ duž krive.
Kriva se zove <u>geodezijom</u> ako

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\gamma' \equiv 0.$$

Očito

$$(|\gamma'|^2)' = 2\gamma'\cdot\gamma'' = 2\gamma'\cdot(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\gamma' + (\gamma''\cdot N)\,N) = 0,$$

što pokazuje da $|\gamma'|^2 \equiv const.$

(c) $\beta(t) = (t,0,0)$, pa je $\beta''(t) = 0$, pa je stoga β geodezija.

(d) Parametrišemo cilindar sa $(u,v)\mapsto \mathbf{x}(u,v) = (x(u), y(u), v)$, gdje $x'^2 + y'^2 = 1$ bez gubitka generalnosti, i stoga $\mathrm{I} = du^2 + dv^2$. Posljedično, $\Gamma^k_{ij} = 0$ i jednačine za geodeziju imaju oblik $u'' = v'' = 0$ tako da $u(t) = at+b$, $v(t) = ct+d$ sa $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Stoga, geodezija je oblika

$$t\mapsto \gamma(t) = (x(at+b), y(at+b), ct+d)$$

i, sa $\mathbf{e} = (0,0,1)$, nalazimo da

$$T\cdot\mathbf{e} = \frac{1}{|\gamma'|}\gamma'\cdot\mathbf{e} = \frac{c}{a^2+c^2} \equiv const.$$

Stoga je γ opšti heliks.

Zadatak 3.

(a) Pretpostavite da je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta su *prva i druga fundamentalna forma* I i II površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [1]

(iii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [2]

(b) Pokažite da je *Enneperova površ* $(u,v) \mapsto (u^3 - 3u(1+v^2), v^3 - 3v(1+u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ. [7]

(c) Izračunajte drugu fundamentalnu formu helikoida. [8]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.
$\mathrm{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$.

(ii) $F = 0$ i $E = G$.

(iii) $\mathbf{x}$ je minimalna ako njena srednja krivina $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}$ nestaje.

(b) Označicemo parametrizaciju sa $\mathbf{x}$, kao i obično. Prvo provjerimo konformalnost: sa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u,v) &= 3(u^2-(1+v^2), -2uv, 2u)\\ \mathbf{x}_v(u,v) &= 3(-2uv, v^2-(1+u^2), -2v)\end{aligned}$$

koeficijenti prve fundamentalne forme postaju

$$\begin{aligned}E(u,v) &= 9\{(u^2-(1+v^2))^2 + 4u^2(1+v^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2\\ G(u,v) &= 9\{(v^2-(1+u^2))^2 + 4v^2(1+u^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2\\ F(u,v) &= 9\{-2uv(u^2-v^2-1+v^2-u^2-1) - 4uv\} &&= 0\end{aligned}$$

što pokazuje da $E = G$ i $F \equiv 0$ tako da je $\mathbf{x}$ konformalno.

Kako bismo provjerili da je $\mathbf{x}$ minimalno mi izračunamo

$$\Delta\mathbf{x}(u,v) = 6(u,-v,1) + 6(-u,v,-1) = (0,0,0)$$

tako da je $\mathbf{x}$ minimalna, jer je konformalna i harmonična.

(c) Helikoid možemo parametrizirati sa

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

(sa prvom fundamentalnom formom $\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u\,\{du^2 + dv^2\}$, kao što je izračunato ranije). Stoga

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \cosh u\,(\cos v, \sin v, 0) \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_v(u,v) = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 1)$$

tako da (vidi Problem 5.4)

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{E}\,(u,v) = \left(\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, \tanh u\right)$$

i

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}(u,v) &= \sinh u\,(\cos v, \sin v, 0)\\ \mathbf{x}_{uv}(u,v) &= \cosh u\,(-\sin v, \cos v, 0)\\ \mathbf{x}_{vv}(u,v) &= -\sinh u\,(\cos v, \sin v, 0)\end{aligned}$$

tako da

$$e(u,v) = 0, \quad f(u,v) = -1 \quad \text{i} \quad g(u,v) = 0$$

i stoga, $\mathrm{II}|_{(u,v)} = -2\,dudv$.