

## Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 21/04/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

**Zadatak 1.** Neka je  $s \mapsto \gamma(s)$  dužinom luka parametrizirana kriva.

- (a) Šta je
- (i) *principalno normalno polje*  $N$  krive  $\gamma$ ? [2]
  - (ii) *principalni okvir*  $F$  krive  $\gamma$  (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]
- (b) Formulшите *Frenetove jednačine*. [3]
- (c) Dokažite da Frenetove jednačine vrijede. [5]
- (d) Neka  $F = (T, N, B)$  označava principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive  $s \mapsto \gamma(s)$  i neka su  $\kappa$  i  $\tau$  krivina i torzija krive  $\gamma$ . Definišimo “Darboux-ovo vektorsko polje”

$$\delta := N \times N' = \tau T + \kappa B.$$

Pokazati da su Frenetove jednačine ekvivalentne jednačinama

$$T' = \delta \times T, \quad N' = \delta \times N, \quad B' = \delta \times B.$$

[8]

**Rješenje.**

- (a)
- (i) Principalna normala je glatko vektorsko polje  $s \mapsto N(s)$  tako da, za sva  $s$ :

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in \text{span}\{\gamma'(s), N(s)\}$$

- (ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje  $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$ , gdje:

$T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$  je jedinično tangentno vektorsko polje,  $N$  je principalna normala i  $B = T \times N$  je binormala.

- (b) Principalni okvir  $F = (T, N, B)$  dužinom luka parametrizovane krive  $s \mapsto \gamma(s)$  zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} T' = & \kappa N \\ N' = & -\kappa T & +\tau B \\ B' = & -\tau N \end{cases}.$$

gdje su  $\kappa := T' \cdot N$  i  $\tau := N' \cdot B$  krivina i torzija krive  $\gamma$ .

- (c) Jer je  $s \mapsto F(s) \in SO(3)$  imamo  $F^{-1} = F^T$  i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Pretpostavimo da naš okvir  $F = (T, N, B)$  zadovoljava Frenetove jednačine i neka je  $\delta := N \times N'$ ; onda, prvo,

$$\delta = N \times (-\kappa T + \tau B) = \kappa B + \tau T$$

kako smo tvrdili jer  $F$  uzima vrijednosti u  $SO(3)$ ; drugo,

$$\begin{aligned} T' - \delta \times T &= \kappa N - (\tau T + \kappa B) \times T = 0, \\ N' - \delta \times N &= -\kappa T + \tau B - (\tau T + \kappa B) \times N = 0, \\ B' - \delta \times B &= -\tau N - (\tau T + \kappa B) \times B = 0. \end{aligned}$$

Stoga, Frenetove jednačine impliciraju jednačine  $X' = \delta \times X$ , gdje  $X = T, N, B$ .

S druge strane, pretpostavimo da je  $s \mapsto F(s) = (T(s), N(s), B(s)) \in SO(3)$  okvir koji zadovoljava  $X' = \delta \times X$  za  $X = T, N, B$  sa  $\delta := \tau T + \kappa B$ . Onda, obrćući gornju pretpostavku, sobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= T' - \delta \times T = T' - \kappa N, \\ 0 &= N' - \delta \times N = N' + \kappa T - \tau B, \\ 0 &= B' - \delta \times B = B' + \tau N. \end{aligned}$$

Stoga, dobijamo Frenetove jednačine.

### Zadatak 2.

- (a) Neka je kriva  $t \mapsto \alpha(t)$  data sa

$$\alpha(t) = \left( \frac{t + \sin t}{2}, \frac{-t + \sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right).$$

- (i) Nadjite krivinu i torziju krive  $\alpha$ . [8]

- (ii) Neka je  $t \mapsto \beta(t)$  druga kriva koja ima istu krivinu i torziju kao kriva  $\alpha$ . Kakav je odnos između  $\alpha$  i  $\beta$ ? [2]

- (b) Dokažite da je  $t \mapsto \gamma(t)$  prava linija ako su  $\gamma''(t)$  i  $\gamma'(t)$  linearno zavisne za sva  $t$ . [5]

- (c) Neka je  $s \mapsto \kappa(s)$  funkcija i definišimo  $\varphi(s) := \int_{s_0}^s \kappa(s) ds$ . Provjerite da

$$\gamma(s) := \left( \int_{s_0}^s \cos \varphi(s) ds, \int_{s_0}^s \sin \varphi(s) ds, 0 \right)$$

definiše dužinom luka parametrizovanu planarnu krivu sa krivinom  $\kappa(s)$ . [5]

### Rješenje.

- (a)

- (i) Prvo parametrišimo  $\alpha$  dužinom luka.

$$\alpha'(t) = \left( (1 + \cos t)/2, (-1 + \cos t)/2, -\sin t/\sqrt{2} \right),$$

pa je  $|\alpha'| = 1$ , pa je kriva već parametrisana dužinom luka. Imamo da je

$$\alpha''(t) = \left( -\sin t/2, -\sin t/2, -\cos t/\sqrt{2} \right),$$

tako da je

$$\kappa = |\alpha''| = 1/\sqrt{2}.$$

Imamo da su

$$T = \left( \frac{1 + \cos t}{2}, \frac{-1 + \cos t}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}} \right),$$

$$N = \left( \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, -\cos t \right),$$

$$B = T \times N = \left( \frac{\cos t - 1}{2}, \frac{\cos t + 1}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}} \right).$$

Stoga je

$$\tau = -B' \cdot N = (\sin t/2, \sin t/2, \cos t/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}.$$

(ii) Po Fundamentalnoj teoremi za prostorne krive,  $\beta$  je jednaka  $\alpha$  do rigidnog kretanja.

- (b) Pretpostavićemo da je  $\gamma$  regularna kriva tako da je  $\gamma'(t) \neq 0$  za sva  $t$ . Jedan mogući nastavak je da pretpostavimo da je  $\gamma$  parametrizovana dužinom luka (reparametrizacija dužinom luka ne mijenja pretpostavku da su  $\gamma''$  i  $\gamma'$  linearno zavisne!); Onda se tvrdnja može dokazati direktnom integracijom. Drugi način je slijedeći, radeći sa proizvoljnom parametrizacijom: Činjenica da su  $\gamma''$  i  $\gamma'$  linearno zavisne se može formulisati kao  $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$  (jer  $\gamma' \neq 0$ ) za pogodnu funkciju  $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}$ . Fiksirajmo  $t_0$  i  $n_1, n_2 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  tako da  $n_1, n_2 \perp \gamma'(t_0)$  i  $n_1 \perp n_2$  (konkretno,  $n_1$  i  $n_2$  su linearno nezavisni). Sada posmatrajmo funkcije

$$t \mapsto g_i(t) := n_i \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Spoznajemo da

$$g_i(t_0) = g_i'(t_0) = 0 \quad \text{i} \quad g_i''(t) = \lambda(t)g_i'(t),$$

to jest,  $g_i$  zadovoljavaju linearnu običnu diferencijalnu jednačinu, koja ima jedinstveno, globalno definisano rješenje  $g_i \equiv 0$ . Stoga,  $t \mapsto \gamma(t)$  zadovoljava jednačine prave:

$$n_1 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = n_2 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = 0.$$

- (c) Ovo je pravolinijski po diferencijaciji: imamo

$$\gamma' = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

po FTPK, tako da je  $|\gamma'| \equiv 1$  i  $\gamma$  je parametrizovana dužinom luka. Kako je  $(x, y)$ -ravan fiksna oskulatorna ravan za cijelu krivu možemo izabrati kao principalnu normalu,

$$N := (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

(ovo dobijemo  $90^\circ$  rotacijom iz  $T = \gamma'$  u  $(x, y)$ -ravni u pozitivnom smislu); sa ovim izborom principalne normale

$$T' \cdot N = (-\varphi' \sin \varphi, \varphi' \cos \varphi, 0) \cdot (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \varphi' = \kappa$$

i kriva ima krivinu  $\kappa$  (obrćući principalnu normalu bi rezultiralo u krivini  $-\kappa$ )

**Zadatak 3.** Neka je  $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$  regularna površ.

- (a)
- (i) Definišite prvu i drugu fundamentalnu I i II površi  $\mathbf{x}$ . [2]
- (ii) Šta znači kada kažemo da je  $\mathbf{x}$  konformalna? [1]
- (b) Pokažite da postoji jedinstveno polje linearnih preslikavanja  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (operator oblika), tako da
- $$\mathbb{II}(\cdot, \cdot) = \mathbb{I}(\cdot, S\cdot);$$
- Pokazati da je  $S$  simetrično u odnosu na  $I$ , tj.,  $\mathbb{I}(\cdot, S\cdot) = \mathbb{I}(S\cdot, \cdot)$ . [4]
- (c) Navedite i dokažite Gaussovu Theoremu Egregium, jasno navodeći sve druge rezultate koje koristite. [5]
- (d)
- (i) Šta znači kada kažemo da  $\mathbf{x}$  parametrizira minimalnu površ? [2]

(ii) Pokažite da je helikoid minimalna površ i odredite njegove asimptotske linije i linije krivine.

[6]

**Rješenje.**

(a)

(i)  $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  sa  $E = |\mathbf{x}_u|^2$ ,  $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$  i  $G = |\mathbf{x}_v|^2$ .

$\mathbb{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$  sa  $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$ ,  $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v$  i  $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$ .

(ii)  $F = 0$  i  $E = G$ .

(b) Ako napišemo fundamentalne forme u matricnoj formi,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbb{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

spoznaćemo da  $\mathbb{II}(\cdot, \cdot) = \mathbf{I}(\cdot, S)$  ako i samo ako

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} Ge-Ff & Gf-Fg \\ Ef-Fe & Eg-Ff \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simetrija  $\mathbf{S}$  u odnosu na  $\mathbf{I}$  prati direktno:

$$\mathbf{I}(\mathbf{S}, \cdot) - \mathbf{I}(\cdot, \mathbf{S}) = \mathbf{S}^t \mathbf{I} - \mathbf{I} \mathbf{S} = \mathbb{II}^t - \mathbb{II} = 0$$

jer je druga fundamentalna forma simetrična.

(c) Gausova krivina  $K$  samo zavisi o  $\mathbf{I}$ :

$$K = \text{funkcija od } E, F, G \text{ i njihovih izvoda.} \tag{G}$$

Izračunavamo

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \\ &= \frac{|\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uu}| |\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv}| - |\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv}|^2}{(EG-F^2)^2} \\ &= \frac{|(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uu})^t (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv})| - |(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv})^t (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv})|}{(EG-F^2)^2} \\ &= \frac{(EG-F^2)(\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv}) + (\mathbf{I} \text{ i } \nabla\text{-stvari})}{(EG-F^2)^2} \end{aligned}$$

tako da  $K$  može, sa  $\nabla$ , biti izračunato iz  $\mathbf{I}$  po slijedećem rezultatu :  $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv} = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}$ .

(d) Helikoid može biti parametrisan sa

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

sa prvom i drugom fundamentalnom formom

$$\mathbf{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u \{du^2 + dv^2\} \quad \text{i} \quad \mathbb{II}|_{(u,v)} = -2dudv,$$

kako je izračunato ranije. Stoga

$$\mathbf{S}|_{(u,v)} = \frac{1}{\cosh^2 u} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

što očito ima  $2H = \text{tr } \mathbf{S} \equiv 0$ .

Jednačine za linije krivine i asimptotske linije postaju

$$0 = (Ef - Fe)u'^2 + (Eg - Ge)u'v' + (Fg - Gf)v'^2 = \cosh^2 u \{-u'^2 + v'^2\}$$

i

$$0 = eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = -2u'v',$$

respektivno. Stoga su asimptotske linije parametarske linije  $u \equiv \text{const}$  i  $v \equiv \text{const}$  i linije krivine su linije  $u \pm v \equiv \text{const}$ .