Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 07/04/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Definišite *jedinično tangentno vektorsko polje* T i *krivinu* κ. [2]

(b) Pokažite da je krivina identično jednaka nuli ako i samo ako slika krive γ leži na pravoj. [5]

(c) Definišite *principalno normalno vektorsko polje* N, *binormalu* B i *torziju* τ. Navedite i dokažite *Frenet-Serret formule* za γ. [5]

(d) Pokažite da je odnos τ/κ konstantan ako i samo ako postoji konstantni jedinični vektor u koji čini konstantan ugao θ sa tangentnim vektorskim poljem T, tj. $T \cdot u = \cos\theta$. Kako se u ovom slučaju zove kriva γ? [8]

Rješenje.

(a) Ako je $\gamma \mapsto \gamma(s)$ parametrizovana dužinom luka, onda

- $T(s) := \gamma'(s)$ definiše jedinično tangentno vektorsko polje i
- $0 = 1' = (T \cdot T)'(s) = T(s) \cdot T'(s)$ tako da $T'(s) \parallel N(s)$ i N može biti definisano normalizacijom T' sve dok T' nije nestalo.

Onda se $K(s) := T'(s)$ zove vektorsko polje krivine krive γ i

$$\kappa(s) := T'(s) \cdot N(s) = K(s) \cdot N(s)$$

se zove njenom krivinom.

(b) Ako je $\gamma(s) = p + qs$, $p, q \in R^3$, $|q| = 1$, onda je $T(s) = q$ konstantno i $T'(s) = 0$, pa je stoga $\kappa(s) = 0$.

Obratno, ako je $\kappa(s) = 0$, onda je T konstatno, $T(s) = q$ recimo. Integrirajući $\gamma'(s) = q$, dobivamo $\gamma(s) = p + qs$, gdje je $p = \gamma(0)$.

(c) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}.$$

Vektorsko polje $B := T \times N$ zovemo binormalno (vektorsko polje) krive. Torzija je

$$\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s)).$$

Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Jer je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Krivu $t \mapsto \gamma(t)$ zovemo (opšti) heliks ako njene tangente čine konstantan ugao sa fiksnim pravcem $a \in \mathbb{R}^3$ u prostoru, tj., $a \cdot T \equiv const$.

Pretpostavimo da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovan (opšti) heliks. Onda

$$0 = (a \cdot T)' = \kappa\, a \cdot N,$$

to jest, ako $\kappa \neq 0$, onda je a paralelno sa rektifirajućom ravni,

$$a = \lambda T + \mu B$$

sa pogodnim funkcijama λ i μ. Diferencirajući nalazimo da

$$0 = a' = \lambda' T + (\lambda\kappa - \mu\tau)\, N + \mu' B,$$

to jest, λ i μ su konstantne i odnos $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \frac{\lambda}{\mu}$ je konstantan.

Obratno, ako $\frac{\tau}{\kappa} \equiv const$ za krivu $s \mapsto \gamma(s)$ biramo $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da

$$0 = \kappa \cos\alpha - \tau \sin\alpha$$

kako bismo dobili

$$(\cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B)' = (\kappa\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\, N \equiv 0.$$

To jest, $a := \cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B$ je konstantan pravac koji čini konstantan ugao α sa T jer je $a \cdot T \equiv \cos\alpha$.

Zadatak 2. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ regularna površ sa prvom i drugom fundamentalnom formom I i $\mathbb{I}$.

(a) Pokažite da postoji jedinstveno polje linearnih preslikavanja $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (*operator oblika*), tako da

$$\mathbb{I}(.,.) = \mathrm{I}(., \mathrm{S}.);$$

Pokazati da je S simetrično u odnosu na I, tj., $\mathrm{I}(., \mathrm{S}.) = \mathrm{I}(\mathrm{S}., .)$. [5]

(b) Definišite precizno pojam *geodezije*. Dokažite da geodezija mora imati konstantnu brzinu. [5]

(c) Neka je površ $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ parametrizirana sa $\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$. Pokažite da je kriva $\beta(t) = \mathbf{x}(t, 0)$ geodezija površi $\mathbf{x}$. [3]

(d) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi parametrizirane kao u (c). [7]

Rješenje.

(a) Ako napišemo fundamentalne forme u matričnoj formi,

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

spozaćemo da $\mathbb{I}(.,.) = \mathrm{I}(., S.)$ ako i samo ako

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simetrija S u odnosu na I prati direktno:

$$\mathrm{I}(\mathrm{S}., .) - \mathrm{I}(., \mathrm{S}.) = \mathrm{S}^t \mathrm{I} - \mathrm{IS} = \mathbb{I}^t - \mathbb{I} = 0$$

jer je druga fundamentalna forma simetrična.

(b) Neka je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ kriva i neka je $t \mapsto \xi(t)$ vektorsko polje duž γ tangentno na površ; neka je $t \mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \xi := \xi' - (\xi' \cdot N)\, N$$

će se zvati <u>kovarijantni izvod</u> od ξ duž krive.
Kriva se zove <u>geodezijom</u> ako

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \gamma' \equiv 0.$$

Očito

$$(|\gamma'|^2)' = 2\gamma' \cdot \gamma'' = 2\gamma' \cdot (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \gamma' + (\gamma'' \cdot N)\, N) = 0,$$

što pokazuje da $|\gamma'|^2 \equiv const.$

(c) $\beta(t) = (t, 0, 0)$, pa je $\beta''(t) = 0$, pa je stoga β geodezija.

(d) Imamo da je

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

Stoga je Gaussovo preslikavanje je onda

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = (\sin v, -\cos v, u)/\sqrt{1+u^2}$$

(primjetiti - negacija ovog izraza je tadjor validan odgovor za $\mathbf{N}$). Koeficijenti prve fundamentalne forme su

$$E = |\mathbf{x}_u|^2 = 1, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad G = |\mathbf{x}_v|^2 = u^2 + 1.$$

Kako je

$$\mathbf{x}_{uu} = 0, \quad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

koeficijenti druge fundamentalne forme su

$$e = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad f = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = -1/\sqrt{1+u^2}, \quad g = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Stoga je operator oblika

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix} = \frac{1}{1+u^2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1+u^2} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix},$$

(napomena - negacija je takodjer tačan odgovor zavisno od znaka $\mathbf{N}$), pa je stoga Gaussova krivina

$$K = \det S = -\frac{1}{(1+u^2)^2},$$

a srednja krivina

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S = 0.$$

Zadatak 3.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. [2]

(b) Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao. [5]

(c)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. [3]

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ. [5]

(d) Neka su $(u, v) \mapsto \mathbf{x}_1(u, v), \mathbf{x}_2(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u, 0) = x_2(u, 0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u, 0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za obje krive. Pokažite da se površi sjeku pod konstantnim uglom. [5]

Rješenje.

(a) Normalno polje N duž γ je paralelno ako $\nabla^\perp N = N' - (N' \cdot T)T \equiv 0$.

(b) Koristimo $T \perp N$:
ako je N paralelno onda $(|N|^2)' = 2N \cdot N' = 2N \cdot \nabla^\perp N \equiv 0$, tj. $|N| \equiv const$;
ako su N_1 i N_2 paralelni onda $(N_1 \cdot N_2)' = N_1' \cdot N_2 + N_1 \cdot N_2' = \nabla^\perp N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot \nabla^\perp N_2 = 0$;
Stoga $\cos\alpha = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1||N_2|} \equiv const$ kada α oznaqv cava ugao izmedju N_1 i N_2.

(c)

(i) Rodriguesova jednačina: $0 = d\mathbf{N} + \kappa d\mathbf{x}$; jednačina je zadovoljena pravcima krivine (κ je onda odgovarajuća principalna krivina) i samo sa njima.

(ii) Ako je $t \mapsto \gamma(t)$ linija krivine, onda po Rodriguesovoj formuli,
$0 \equiv N' + \kappa\gamma' = \nabla^\perp N + (\kappa + \frac{N' \cdot \gamma'}{|\gamma'|^2})\gamma'$ i konkretno, $\nabla^\perp N \equiv 0$.
Ako je $\nabla^\perp N \equiv 0$, onda $N' = -\kappa\gamma'$ sa nekom funkcijom κ i po Rodriguesovoj formuli, γ' je pravac krivine (sa odgovarajućom principalnom krivinom κ).

(d) Ako je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_i$ onda je $N_i(u) = \mathbf{N}_i(u, 0)$ paralelno duž γ po (c);
stoga, ako je γ linija krivine za obje površi, onda su N_1 i N_2 paralelna normalna polja duž γ, te stoga čine konstantan ugao, po (b).