Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 04/02/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Možete uraditi sva pitanja, no ocjena će se dodijeliti za NAJBOLJA 3 odgovora na 4 ponudjena zadatka.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [2]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [3]

(b) Formulišite i dokažite *Frenetove jednačine.* [7]

(c) Neka je $t \mapsto \beta(t) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ regularna kriva i definišimo

$$t \mapsto \gamma(t) := \int_{t_0}^{t} \beta(t) \times \beta'(t) dt.$$

Pokazati da γ ima konstantnu torziju. (Pomoć: $a \times (b \times c) = b\,(a \cdot c) - c\,(a \cdot b)$.) [8]

Zadatak 2. Neka je $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 5x^2 + y^2 = 1 + z^2, z = y + 1\}$.

(a) Napišite C kao bazni skup, tj. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0\}$, sa dvije odgovarajuće funkcije F_1 i F_2; zatim

(i) provjerite da C definiše regularnu krivu tako što ćete pokazati da su gradijenti $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$; [3]

(ii) nadjite regularnu parametrizaciju za krivu. [4]

(b) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva, $T = \gamma'$, sa $T'(s) \neq 0$ za sva s.

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ, kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$. [2]

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$. [2]

(c) Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizovana kriva i neka je $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ repara – metrizacija krive γ (ne obavezno dužinom luka). Pokažite da je, za sva s,

$$\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(s)$$

(**Pomoć**: Razmislite o koeficijentima koje trebate prije računanja!) [5]

(d) Zaključite iz (b) i (c) da je, za regularnu parametriziranu krivu $t \mapsto \gamma(t)$,

$$\kappa^2 = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}.$$

[4]

Zadatak 3.

(a) Pretpostavite da je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta je *prva fundamentalna forma* I površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [2]

(b)

(i) Neka $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$ parametrizira površ revolucije; nadjite uslove za r i h kako bi $\mathbf{x}$ bila konformalna površ. [4]

(ii) Nadjite konformalnu parametrizaciju $\mathbf{x}$ površi

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}.$$

[4]

(c) Pretpostavite da je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ, kao u (a).

(i) Šta je *druga fundamentalna forma* $\mathbb{I}$ površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [2]

(d) Pokažite da je površ Σ, definisana u (b), minimalna površ. [4]

Zadatak 4.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao. [5]

(b)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. [2]

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ. [4]

(c) Neka su $(u, v) \mapsto \mathbf{x}_1(u, v), \mathbf{x}_2(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u, 0) = x_2(u, 0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u, 0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_1$ i da se obje površi sijeku pod konstantnm uglom α, $\cos \alpha \neq \pm 1$. Pokažite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_2$. [5]

(d) Stoga, dajte geometrijski argument (bez komputacije) da su meridijani, $v = const$, površi revolucije $(u, v) \mapsto (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$ linije krivine. [4]