Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 21/01/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Možete uraditi sva pitanja, no ocjena će se dodijeliti za NAJBOLJA 3 odgovora na 4 ponudjena zadatka.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [2]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [3]

(b) Formulišite *Frenetove jednačine.* [4]

(c) Dokažite da Frenetove jednačine vrijede. [5]

(d) Pretpostavimo da sve rektifirajuće ravni $\{P \in \mathbb{R}^3 | (P - \gamma(s)) \cdot N(s) = 0\}$ krive γ prolaze kroz (fiksnu) tačku $P_0 \in \mathbb{R}^3$. Pokažite da postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $(a - s)\kappa(s) = b\tau(s)$, gdje su κ i τ krivina i torzija krive γ. [6]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje: $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases} .$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

(c) Jer je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Možemo napisati $P_0 = \gamma + \alpha T + \beta B$ sa odgovarajućim funkcijama $s \mapsto \alpha(s), \beta(s) \in \mathbb{R}$; uzimajući izvod nalazimo, jer su T, N i B linearno nezavisni,

$$0 = (1 + \alpha')T + (\alpha\kappa - \beta\tau)N + \beta' B \iff 0 \equiv 1 + \alpha' = \beta' = \alpha\kappa - \beta\tau.$$

Konkretno, imamo $a, b \in \mathbb{R}$ takve da: $\beta \equiv b, \alpha(s) = a - s$;
onda: $0 = \alpha(s)\kappa(s) - \beta(s)\tau(s) = (a - s)\kappa(s) = b\tau(s)$

Zadatak 2. Neka je $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4(x^2 + y^2) = 1 + z^2, z = 2x + 1\}$.

(a) Napišite C kao bazni skup, tj. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0\}$, sa dvije odgovarajuće funkcije F_1 i F_2; zatim

(i) provjerite da C definiše regularnu krivu tako što ćete pokazati da su gradijenti $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$; [3]

(ii) nadjite regularnu parametrizaciju za krivu. [6]

(b) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva, $T = \gamma'$, sa $T'(s) \neq 0$ za sva s.

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ, kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$. [3]

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$. [3]

(c) Nadjite krivinu (do znaka) i torziju krive date u (a). [5]

Rješenje.

(a)

(i) Uzmimo $F_1(x, y, z) := 4x^2 + 4y^2 - z^2 - 1$ i $F_2(x, y, z) := 2x - z + 1$;
Onda $\nabla F_1(x, y, z) \times \nabla F_2(x, y, z) = -4(2y, z - 2x, 4y) = -4(2y, 1, 4y) \neq 0$ jer je $z = 2x + 1$;
stoga su $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$.
Teorema implicitnog preslikavanja sada osigurava da je C regularna kriva.

(ii) Posmatrajmo $0 = F_1(x, y, 2x + 1) = 4y^2 - 4x - 2$, što daje $x = y^2 - \frac{1}{2}$;
stoga $t \mapsto \gamma(t) := (t^2 - \frac{1}{2}, t, 2t^2)$ daje regularnu parametrizaciju jer je $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t) \neq 0, \forall t$.

(b)

(i) Krivina: $\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s) = |T'(s)|$.
Torzija: $\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s))$

(ii) γ je parametrizirana dužinom luka, $|\gamma'|^2 \equiv 1$, tako da $\gamma'' \perp \gamma'$;
onda $|\gamma' \times \gamma''|^2 = |\gamma'|^2 |\gamma''|^2 = |\gamma''|^2 = |T'|^2 = \kappa^2$.

(c) Računamo $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t)$ i $\gamma''(t) = (2, 0, 4)$ tako da $\kappa = \frac{|(4,0,-2)|}{|(2t,1,4t)|^3} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{1+20t^2}^3}$; jer je γ planarna kriva, $\tau = 0$.

Zadatak 3.

(a) Pretpostavite da je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta je *prva fundamentalna forma* I površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [2]

(b)

(i) Neka $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$ parametrizira površ revolucije; nadjite uslove za r i h kako bi $\mathbf{x}$ bila konformalna površ. [6]

(ii) Nadjite konformalnu parametrizaciju $\mathbf{x}$ površi

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}.$$

[6]

(c) Pretpostavite da je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ, kao u (a).

(i) Šta je *druga fundamentalna forma* $\mathbb{I}$ površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [2]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.

(ii) $F = 0$ i $E = G$.

(b)

(i) Ovdje

$$E(u,v) = |(r'(u)\cos v, r'(u)\sin v, h'(u))|^2 = r'^2(u) + h'^2(u)$$
$$F(u,v) = (r'(u)\cos v, r'(u)\sin v, h'(u)) \cdot (-r(u)\sin v, r(u)\cos v, 0) = 0$$
$$G(u,v) = |(-r(u)\sin v, r(u)\cos v, 0)|^2 = r^2(u)$$

tako da je površ konformalna ako i samo ako $r'^2 + h'^2 = r^2$.

(ii) Parametrizirajući Σ kao površ revolucije imamo $z = h(u)$ i $\cosh z = \sqrt{x^2+y^2} = r(u)$; stoga $r(u) = \cosh h(u)$ tako da konformalnost znači

$$h'^2(u)\sinh^2 h(u) + h'^2(u) = \cosh^2 h(u) \iff h'^2(u) \equiv 1;$$

stoga $(u,v) \mapsto \sigma(u,v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ daje konformalnu parametrizaciju od Σ.

(c)

(i) $\mathbb{I} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$.

(ii) $\mathbf{x}$ je minimalna ako njena srednja krivina $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}$ nestaje.

Zadatak 4.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. [2]

(b) Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao. [5]

(c)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. [3]

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ. [5]

(d) Neka su $(u,v) \mapsto \mathbf{x}_1(u,v), \mathbf{x}_2(u,v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u,0) = x_2(u,0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u,0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za obje krive. Pokažite da se površi sjeku pod konstantnim uglom. [5]

Rješenje.

(a) Normalno polje N duž γ je paralelno ako $\nabla^{\perp} N = N' - (N' \cdot T)T \equiv 0$.

(b) Koristimo $T \perp N$:
ako je N paralelno onda $(|N|^2)' = 2N \cdot N' = 2N \cdot \nabla^{\perp} N \equiv 0$, tj. $|N| \equiv const$;
ako su N_1 i N_2 paralelni onda $(N_1 \cdot N_2)' = N_1' \cdot N_2 + N_1 \cdot N_2' = \nabla^{\perp} N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot \nabla^{\perp} N_2 = 0$;
Stoga $\cos\alpha = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1||N_2|} \equiv const$ kada α oznaqv cava ugao izmedju N_1 i N_2.

(c)

(i) Rodriguesova jednačina: $0 = d\mathbf{N} + \kappa d\mathbf{x}$; jednačina je zadovoljena pravcima krivine (κ je onda odgovarajuća principalna krivina) i samo sa njima.

(ii) Ako je $t \mapsto \gamma(t)$ linija krivine, onda po Rodriguesovoj formuli,
$0 \equiv N' + \kappa\gamma' = \nabla^{\perp} N + (\kappa + \frac{N' \cdot \gamma'}{|\gamma'|^2})\gamma'$ i konkretno, $\nabla^{\perp} N \equiv 0$.
Ako je $\nabla^{\perp} N \equiv 0$, onda $N' = -\kappa\gamma'$ sa nekom funkcijom κ i po Rodriguesovoj formuli, γ' je pravac krivine (sa odgovarajućom principalnom krivinom κ).

(d) Ako je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_i$ onda je $N_i(u) = \mathbf{N}_i(u, 0)$ paralelno duž γ po (c);
stoga, ako je γ linija krivine za obje površi, onda su N_1 i N_2 paralelna normalna polja duž γ, te stoga čine konstantan ugao, po (b).