Diferencijalna Geometrija: Test 2 27/12/2013

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ regularna parametrizovana površ.

(a)

(i) Dokažite da su $\mathbf{n}(u, v)$ i $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v(u, v)$ paralelni vektori za sva u, v.

(ii) Izračunajte $(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v).\mathbf{n}$ i zaključite da je

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K\sigma_u \times \sigma_v$$

[Pomoć: Sjetite se Lagrangeovog identiteta $(a \times b).(c \times d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$]

(b) Pokažite da je *Enneperova površ* $(u, v) \mapsto (u^3 - 3u(1 + v^2), v^3 - 3v(1 + u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ.

(c) Izraunajte drugu fundamentalnu formu helikoida.

(d) Dokažite da je *cilindar* razvojna površ. Navedite sve razvojne površi koje znate.

(e) Pokažite da je kupa $(r, \theta) \mapsto r\,\gamma(\theta)$, gdje je $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$ dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izometrična ravni.

Rješenje.

(a)

(i) $\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) = \mathbf{n}_u(\mathbf{n}.\mathbf{n}_v) - \mathbf{n}_v(\mathbf{n}.\mathbf{n}_u) = 0 - 0 = 0$, pa su vektori paralelni.

(ii) Direktnom primjenom navedenog identiteta i definicije Gaussovog preslikavanja i Gaussove krivine.

(b) Označicemo parametrizaciju sa $\mathbf{x}$, kao i obično. Prvo provjerimo konformalnost: sa

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u, v) &= 3(u^2 - (1 + v^2), -2uv, 2u) \\
\mathbf{x}_v(u, v) &= 3(-2uv, v^2 - (1 + u^2), -2v)
\end{aligned}$$

koeficijenti prve fundamentalne forme postaju

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= 9\{(u^2 - (1 + v^2))^2 + 4u^2(1 + v^2)\} &&= 9(1 + u^2 + v^2)^2 \\
G(u, v) &= 9\{(v^2 - (1 + u^2))^2 + 4v^2(1 + u^2)\} &&= 9(1 + u^2 + v^2)^2 \\
F(u, v) &= 9\{-2uv(u^2 - v^2 - 1 + v^2 - u^2 - 1) - 4uv\} &&= 0
\end{aligned}$$

što pokazuje da $E = G$ i $F \equiv 0$ tako da je $\mathbf{x}$ konformalno.

(c) Helikoid možemo parametrizirati sa

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

(sa prvom fundamentalnom formom $\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u\,\{du^2 + dv^2\}$, kao što je izračunato ranije). Stoga

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \cosh u\,(\cos v, \sin v, 0) \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 1)$$

tako da (vidi Problem 5.4)

$$\mathbf{n}(u,v) = \tfrac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{E}(u,v) = (\tfrac{\sin v}{\cosh u}, -\tfrac{\cos v}{\cosh u}, \tanh u)$$

i

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}(u,v) &= \sinh u\,(\cos v, \sin v, 0)\\ \mathbf{x}_{uv}(u,v) &= \cosh u\,(-\sin v, \cos v, 0)\\ \mathbf{x}_{vv}(u,v) &= -\sinh u\,(\cos v, \sin v, 0)\end{aligned}$$

tako da

$$e(u,v) = 0, \quad f(u,v) = -1 \quad \text{i} \quad g(u,v) = 0$$

i stoga, $\mathbb{I}\!\mathbb{I}|_{(u,v)} = -2\,dudv$.

(d) Cilindar

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (x(u), y(u), v) = \overbrace{(x(u), y(u), 0)}^{=:\gamma(u)} + v\,\overbrace{(0,0,1)}^{=:\eta(u)}$$

je onda (očito) linijska površ i ima Gaussovo preslikavanje

$$\mathbf{n}(u,v) = \tfrac{1}{\sqrt{x'^2(u)+y'^2(u)}}(y'(u), -x'(u), 0),$$

koje ne zavisi o linijskom parametru v.

(e) Parametrizirajući Σ kao površ revolucije imamo $z = h(u)$ i $\cosh z = \sqrt{x^2+y^2} = r(u)$; stoga $r(u) = \cosh h(u)$ tako da konformalnost znači

$$h'^2(u)\sinh^2 h(u) + h'^2(u) = \cosh^2 h(u) \iff h'^2(u) \equiv 1;$$

stoga $(u,v) \mapsto \sigma(u,v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ daje konformalnu parametrizaciju od Σ.

Zadatak 2.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao.

(b) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{n}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ.

(c) Neka su $(u,v) \mapsto \mathbf{x}_1(u,v), \mathbf{x}_2(u,v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u,0) = x_2(u,0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u,0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_1$ i da se obje površi sijeku pod konstantnm uglom α, $\cos\alpha \neq \pm 1$. Pokažite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_2$.

(d) Stoga, dajte geometrijski argument da su meridijani, $v = const$, površi revolucije $(u,v) \mapsto (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ linije krivine.

(e) Neka su $(u,v) \mapsto \mathbf{x}_1(u,v), \mathbf{x}_2(u,v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u,0) = x_2(u,0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u,0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za obje krive. Pokažite da se površi sjeku pod konstantnim uglom.

Rješenje.

(a) Normalno polje N duž γ je paralelno ako $\nabla^\perp N = N' - (N'\cdot T)T \equiv 0$.

Koristimo $T \perp N$:
ako je N paralelno onda $(|N|^2)' = 2N\cdot N' = 2N\cdot\nabla^\perp N \equiv 0$, tj. $|N| \equiv const$;
ako su N_1 i N_2 paralelni onda $(N_1\cdot N_2)' = N_1'\cdot N_2 + N_1\cdot N_2' = \nabla^\perp N_1\cdot N_2 + N_1\cdot\nabla^\perp N_2 = 0$;
Stoga $\cos\alpha = \frac{N_1\cdot N_2}{|N_1||N_2|} \equiv const$ kada α označava ugao izmedju N_1 i N_2.

(b) Ako je $t \mapsto \gamma(t)$ linija krivine, onda po Rodriguesovoj formuli,
$0 \equiv N' + \kappa\gamma' = \nabla^\perp N + (\kappa + \frac{N'\cdot\gamma'}{|\gamma'|^2})\gamma'$ i konkretno, $\nabla^\perp N \equiv 0$.
Ako je $\nabla^\perp N \equiv 0$, onda $N' = -\kappa\gamma'$ sa nekom funkcijom κ i po Rodriguesovoj formuli, γ' je pravac krivine (sa odgovarajućom principalnom krivinom κ).

(c) Ako je γ linija krivine za $\mathbf{x}_1$, onda je $N_1 = \mathbf{n}_1(\cdot, 0)$ paralelno duž γ;
ako se površi sijeku pod konstantnim uglom, onda $0 = (N_1 \cdot N_2)' = N_1' \cdot N_2 + N_1 \cdot N_2' = N_1 \cdot \nabla^\perp N_2$;
stoga $\nabla^\perp N_2 \perp N_1, N_2$ tako da je $\nabla^\perp \equiv 0$, jer su N_1 i N_2 linearno nezavisni ($\cos\alpha \neq \pm 1$).

(d) Meridijan je ortogonalni presjek površi sa ravni kroz z-osu; on je linija krivine na njenoj ravni (normala ravni je konstantna, tako da Rodriguesova formula vrijedi sa $\kappa = 0$). Stoga, meridijan je linija krivine na površi revolucije po (c).

(e) Ako je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_i$ onda je $N_i(u) = \mathbf{n}_i(u, 0)$ paralelno duž γ po (c);
stoga, ako je γ linija krivine za obje površi, onda su N_1 i N_2 paralelna normalna polja duž γ, te stoga čine konstantan ugao.