Matematika I

Elvis Baraković[1]

15. studenoga 2018.

[1]Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika, Univerzitetska 4 75000 Tuzla;http://pmf.untz.ba/staff/elvis.barakovic/

Sadržaj

Poglavlje 1

Linearna algebra

1.1 Matrice i determinante

1.1.1 Operacije sa matricama

Primjer 1.1.1 *Odrediti parametre a i b tako da matrice*

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad i \quad \begin{bmatrix} a^2 & 12 \\ 3 & b+3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

budu jednake.

Rješenje. Matrice A i B su istog formata i jednake su ako su im odogvarajući elementi jednaki. Dakle, mora da vrijedi $a^2 = 4$ odakle je $a = \pm 2$ i $b + 3 = -1$ odakle je $b = -4$.

Primjer 1.1.2 *Izračunati zbir i razliku matrica*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad i \quad \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Obje matrice su formata 2×2 pa se mogu sabrati i oduzeti. Imamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 4+5 \\ -3+2 & 0+2 \\ 5-1 & 7+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 4-5 \\ -3-2 & 0-2 \\ 5+1 & 7-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Primjer 1.1.3 *Date su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odrediti sve uređene parove onih matrica koje se međusobno mogu sabrati i pomnožiti.

Rješenje. Sabrati se mogu matrice istog formata. Od datih matrica ovaj uslov zadovoljavaju matrice A, D i F jer su sve tri formata 2×2, pa je

$$\begin{aligned} A+D &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+7 & 5+9 \\ 7-3 & 9-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \\ A+F &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 5+0 \\ 7+0 & 9+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}, \\ D+F &= \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+1 & 9+0 \\ -3+0 & -2+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Proizvod dvije matrice $P \cdot Q$ je moguć samo u slučaju da matrica Q ima onoliko vrsta koliko matrica P ima kolona. Rezultat množenja je nova matrica čiji je broj vrsta jednak broju vrsta matrice P a broj kolona jednak broju kolona matrice Q.U našem slučaju ovaj uslov ispunjavaju sljedeći parovi matrica: (A, D), (A, F), (D, F), (D, A), (F, A), (F, D), (B, A), (B, D), (B, F), (E, B), (E, C). Izračunajmo proizvode $A \cdot D$ i $E \cdot B$

$$\begin{aligned} A \cdot D &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 7 + 5 \cdot (-3) & 3 \cdot 9 + 5 \cdot (-2) \\ 7 \cdot 7 + 9 \cdot (-3) & 7 \cdot 9 + 9 \cdot (-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 22 \\ 17 & 45 \end{bmatrix}, \\ E \cdot B &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Primjer 1.1.4 *Data je matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunati matricu A^2.

Rješenje. Imamo:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.1.5 *Data je funkcija* $f(x) = x^2 - x - 1$ *i matrica*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Izračunati $f(A)$.

Rješenje. Neka je E jedinična matrica. Tada je $f(A) = A^2 - A - E$. Budući da je

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tada je

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - A - E = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Primjer 1.1.6 *Data je funkcija* $f(x) = x^3 - 1$ *i matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Izračunati $f(A)$.

Rješenje. Neka je E jedinična matrica. Tada je $f(A) = A^3 - E$. Budući da je

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & -11 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

tada je

$$f(A) = \begin{bmatrix} -3 & -11 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -11 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.1.7 *Date su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunati $f(A) + f(B^T)$ *ako je* $f(x) = x^2 - x - 1$.

Rješenje. Neka je E jedinična matrica. Tada je

$$f(A) = A^2 - A - E = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Transponovana matrica matrice B je

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

pa je

$$\begin{aligned} f(B^T) &= (B^T)^2 - B^T - E = \begin{bmatrix} -12 & -4 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -13 & 0 \\ 0 & -13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sada je

$$f(A) + f(B^T) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13 & 0 \\ 0 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -4 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.1.8 *Dokazati da za matricu*

$$A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

vrijedi $A(t) \cdot A(r) = A(t + r), \quad (t, r \in \mathbb{R})$.

Rješenje. Kako je

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad i \quad A(r) = \begin{bmatrix} \cos r & -\sin r \\ \sin r & \cos r \end{bmatrix}$$

tada je

$$\begin{aligned} A(t) \cdot A(r) &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos r & -\sin r \\ \sin r & \cos r \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos t \cdot \cos r - \sin t \cdot \sin r & -\cos t \cdot \sin r - \sin t \cdot \cos r \\ \sin t \cdot \cos r + \cos t \cdot \sin r & -\sin t \cdot \sin r + \cos t \cdot \cos r \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos t \cdot \cos r - \sin t \cdot \sin r & -(\cos t \cdot \sin r + \sin t \cdot \cos r) \\ \sin t \cdot \cos r + \cos t \cdot \sin r & \cos t \cdot \cos r - \sin t \cdot \sin r \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t+r) & -\sin(t+r) \\ \sin(t+r) & \cos(t+r) \end{bmatrix} = A(t+r). \end{aligned}$$

Primjer 1.1.9 *Ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pokazati da je

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdje je n prirodan broj.

Rješenje. Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom.
1) Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Direktnim uvrštavanjem $n = 1$ u izraz za A^n dobijamo da je $A^1 = A$, tj. tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
2) Pretpostavimo da je tvrdnja tačna i za $n = k$ tj. neka vrijedi

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Dokažimo da je tvrdnja tačna i za $n = k+1$, tj. da vrijedi

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \dfrac{(k+1)((k+1)-1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \dfrac{(k+1)k}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^k \cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & k & \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & k+1 & k + \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \dfrac{(k+1)k}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije tvrdnja je tačna za svaki prirodan broj

Primjer 1.1.10 *Matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

predstaviti kao zbir jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice.

Rješenje. Kvadratna matrica je simetrična ako su joj elementi simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ i vrijedi

$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right).$$

Kvadratna matrica je antisimetrična ako je jednaka svojoj negativnoj transponovanoj matrici i vrijedi

$$A_K = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right).$$

Kako je

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

onda je

$$\begin{aligned} A_S &= \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ A_k &= \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.1.2 Kvadratna matrica i njena determinanta

Ukoliko je broj vrsta matrice jednak broju kolona, tj. za matricu oblika kažemo da je kvadratna matrica reda n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

a broj oblika

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

nazivamo determinanta n-tog reda pridružena kvadratnoj matrici.
Determinantu drugog reda računamo po formuli

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Determinantu trećeg rada računamo po Sarusovom pravilu

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\
&= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\
&- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).
\end{aligned}$$

Osobine determinanti:

1. Ako je A^T transponovana matrica matrice A tada je $detA = detA^T$.
2. Determinanata mijenja znak ako dvije vrste (kolone) zamijene mjesta.
3. Determinanata se množi brojem tako što se tim brojem pomnože svi elementi samo jedne vrste (kolone).
4. Determinanta ne mijenja vrijednost ako elementima jedne vrste (kolone) dodamo odgovarajuće elemente druge vrste (kolone) pomnožene istim brojem.
5. Ako su svi elementi jedne vrste (kolone) determinante jednaki nuli tada je determinanata jednaka nuli.
6. Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jedne vrste (kolone) jednaki odgovarajućim elementima druge vrste (kolone).

Primjer 1.1.11 *Izračunati determinantu*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1.$$

Primjer 1.1.12 *Izračunati determinantu matrice*

$$A = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Imamo

$$det(A) = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

Primjer 1.1.13 *Izračunati determinantu*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Na osnovu Sarusove formule za računanje determinante trećeg reda, imamo

$$\begin{aligned}
\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{matrix} &= (-4+0+0) - (0+18+2) \\
&= -4 - 20 = -24.
\end{aligned}$$

Primjer 1.1.14 *Izračunati determinantu primjenom Sarusove formule i Laplasovog razvoja determinanate*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Primjenom Sarusove formule imamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{matrix} = \\ &= (1+8+72)-(6-12-8)=95. \end{aligned}$$

Izvršimo Laplasov razvoj determinante po prvoj vrsti

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 1\,(1+12)+2\,(4+4)+3\,(24-2)= \\ &= 13+16+66=95. \end{aligned}$$

Primjer 1.1.15 *Izračunati determinantu*

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Laplasovim razvojem ove determinante po prvoj vrsti i računanjem vrijednosti četiri novodobijene determinante trećeg reda, dobijamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \\ &+ 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4\cdot(-18)-2\cdot(-26)+3\cdot 15-0=25. \end{aligned}$$

Primjer 1.1.16 *Izračunati vrijednost determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & n+1 & n+4 \\ 1 & n+2 & n+5 \\ 1 & n+3 & n+6 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Korištenjem osobina determinanti, dobijamo

$$\begin{vmatrix} 1 & n+1 & n+4 \\ 1 & n+2 & n+5 \\ 1 & n+3 & n+6 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & n+1 & n+4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

pri čemu su:
(1) od druge i treće vrste oduzimamo prvu vrstu determinante.
(2) Laplasov razvoj determinante po prvoj koloni.

Primjer 1.1.17 *Izračunati vrijednost determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Korištenjem osobina determinanti, dobijamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \\ &\overset{(3)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

pri čemu su:
(1) od druge i treće vrste oduzimamo prvu vrstu determinante.
(2) Laplasov razvoj determinante po prvoj koloni.
(3) izvlačimo faktore $(b-a)$ i $(c-a)$ ispred determinante.

Primjer 1.1.18 *Izračunati determinantu*

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & a & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Korištenjem osobina determinanti, dobijamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & a & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix} &\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \\ b & a & b & a \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -(a-b)\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & b & b \\ b & a & b \end{vmatrix} \\ &\overset{(3)}{=} -(a-b)\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & b & b \\ 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -(a-b)(b-a)\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \\ &= -(a-b)(b-a)(a^2-b^2) \\ &= -(a-b)(b-a)(a-b)(a+b) = (a-b)^3(a+b). \end{aligned}$$

pri čemu su:
(1) od treće vrste oduzimamo prvu vstu.
(2) Laplasov razvoj determinante po trećoj vrsti.
(3) od treće vrste oduzimamo prvu vrstu.
(4) Laplasov razvoj determinante po trećoj vrsti.

Primjer 1.1.19 *Riješiti jednačinu*

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rješenje. Kako je

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(x+2),$$

tada $-2(x+2) = 0$ pa je $x = -2$.

1.1.3 Inverzna matrica

Primjer 1.1.20 *Odrediti inverznu matricu matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Determinanta matrice je

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

Kofaktori matrice su

$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = 3, \quad A_{21} = 2, \quad A_{22} = 1,$$

pa je adjungovana matrica matrice A

$$adjA = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverzna matrica matrice A je

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.1.21 *Odrediti inverznu matricu matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Determinanta date matrice je

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

Kofaktori matrice A su

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

pa je adjungovana matrica matrice A

$$adjA = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -7 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -7 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/6 \\ -2/3 & -4/3 & 7/6 \\ 1/3 & 2/3 & -1/6 \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.1.22 *Data je funkcija $f(x) = -x^{-2} + 2x - 3$ i matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Izračunati $f(A)$.

Rješenje. Neka je E jedinična matrica. Tada je $f(A) = -A^{-2} + 2A - 3E$. Inverzna matrica matrice A je

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

pa je

$$A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} P(A) &= 2A - A^{-2} - 3E = \\ &= 2\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 8 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{79}{16} & -\frac{35}{16} & -\frac{131}{32} \\ 0 & -6 & \frac{27}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Primjer 1.1.23 *Data je funkcija $f(x) = -2 + 3x + x^{-2}$ i matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Izračunati $f(A)$.

Rješenje. Neka je E jedinična matrica. Tada je $f(A) = -2E + 3A + A^{-2}$. Inverzna matrica matrice A je

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

pa je

$$\begin{aligned} A^{-2} &= A^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} P(A) &= -2E + 3A + A^{-2} = \\ &= -2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{9}{4} & -\frac{25}{4} \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{109}{36} \\ 0 & 0 & -\frac{98}{9} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.1.4 Matrične jednačine

Primjer 1.1.24 *Riješiti matričnu jednačinu*

$$X\,(A+E) = 2A - E$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

i E jedinična matrica.

Rješenje. Neka je

$$\begin{aligned} P &= A + E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ Q &= 2A - E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sada matrična jednačina ima oblik $XP = Q$ čije je rješenje matrica $X = QP^{-1}$. Inverzna matrica matrice P je

$$P^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{bmatrix} -6 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične jednačine je matrica

$$\begin{aligned} X &= QP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Primjer 1.1.25 *Riješiti matričnu jednačinu*

$$X\,(2A - 3E) = 2E - A$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

i E jedinična matrica.

Rješenje. Neka je

$$\begin{aligned} P &= 2A - 3E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \\ Q &= 2E - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sada matrična jednačina ima oblik $XP = Q$ čije je rješenje matrica $X = QP^{-1}$. Inverzna matrica matrice P je

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -9 & -18 & 0 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične jednačine je matrica

$$\begin{aligned} X &= QP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{9} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Primjer 1.1.26 *Riješiti matričnu jednačinu*

$$AX - 2A = 2BX - B + E$$

gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

i E jedinična matrica.

Rješenje. Datu jednačinu možemo transformisati u sljedeći oblik

$$(A-2B)\,X = 2A - B + E.$$

Neka je

$$\begin{aligned}
P &= A-2B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \\
Q &= 2A-B+E = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sada matrična jednačina ima oblik $PX = Q$ čije je rješenje matrica $X = P^{-1}Q$. Inverzna matrica matrice P je

$$P^{-1} = \frac{1}{-54}\begin{bmatrix} 18 & 9 & -9 \\ 0 & 27 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične jednačine je matrica

$$\begin{aligned}
X &= P^{-1}Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{51}{54} \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Primjer 1.1.27 *Riješiti matričnu jednačinu*

$$AX^{-1} = A - X^{-1}$$

ako je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Matrična jednačina

$$AX^{-1} = A - X^{-1}$$

je ekvivalentna jednačini

$$AX = A + E$$

jer

$$\begin{aligned}
AX^{-1} &= A - X^{-1} \\
AX^{-1} + X^{-1} &= A \\
(A+E)\,X^{-1} &= A \quad / \cdot X \\
(A+E)\,X^{-1}X &= AX \\
A+E &= AX.
\end{aligned}$$

Neka je

$$B = A + E = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sada matriča jednačina ima oblik

$$AX = B$$

čije je rješenje matrica $X = A^{-1}B$. Inverzna matrica matrice A je matrica

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

pa je rješenje matrične jednačine matrica

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

1.1.5 Rang matrice

Pod elementranim transformacijama matrice podrazumijevaju se:
1) Zamjena bilo koje dvije vrste (ili kolone) matrice.
2) Množenje elemenata bilo koje vrste (ili kolone) matrice brojem različitim od nule.
3) Dodavanje elementima bilo koje vrste (ili kolone) odgovarajuće elemente bilo koje druge vrste (ili kolone) predhodno pomnožene nekim brojem.
Broj linearno nezavisnih vrsta (kolona) matrice naziva se *rang matrice.*

Primjer 1.1.28 *Odrediti rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ Zamjena I i III vrste} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot 2 \quad \cdot(-4) \\ + \qquad + \\ \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-7) \\ \cdot 3 \ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dakle, $rang A = 3$.

Primjer 1.1.29 *Odrediti rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Imamo

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \quad \cdot 3 \\ + \quad + \\ \; \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \; \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $rang A = 2$.

Primjer 1.1.30 *Odrediti rang matrice*

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Rješenje. Imamo

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \quad \cdot 2 \\ + \quad + \\ \; \\ - \end{matrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \; \\ \cdot(-1) \\ + \\ \; \end{matrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \; \\ \; \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $rang A = 4$.

Primjer 1.1.31 *Odrediti rang matrice*

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}.
$$

Rješenje. Imamo

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \cdot(-2)\ \cdot(-3) \\ + \\ + \\ + \end{array}
\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -6 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -6 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \cdot(-4)\ \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array}
\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dakle, $rangA = 3$.

Primjer 1.1.32 *Odrediti rang matrice*

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.
$$

Rješenje. Imamo

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \cdot(-2)\ \cdot 2\ \cdot(-3) \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & -9 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & -9 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \cdot 5\ \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -18 & -22 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dakle, $rangA = 3$.

Primjer 1.1.33 *U zavisnosti od realnog parametra λ odrediti rang matrice*

$$
A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.
$$

Rješenje. Imamo

$$
A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \cdot(-1)\ \cdot(-\lambda) \\ + \\ + \end{array}
$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) \end{bmatrix}$$

Diskusija:

1. ako je $\lambda = 1$ tada je $rangA = 1$ jer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. ako je $\lambda = -2$ tada je $rangA = 2$ jer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. ako je $\lambda \neq 1$ i $\lambda \neq -2$ tada je $rangA = 3$.

Primjer 1.1.34 *U zavisnosti od realnog parametra λ odrediti rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Imamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-4)\ \cdot(-7)\ \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-3)\ \cdot(-5) \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diskusija:

1. ako je $\lambda = 0$ tada je $rangA = 2$,

2. ako je $\lambda \neq 0$ tada je $rangA = 3$.

1.1.6 Spektar matrice

Neka je A kvadratna matrica. Polinom $\mathcal{K}_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ se naziva svojstveni polinom matrice A a rješenja jednačine $\mathcal{K}_A(\lambda) = 0$ su svojstvene vrijednosti matrice A. Vektor $x \neq 0$ za koji vrijedi $Ax = \lambda x$ se naziva svojstveni vektor matrice A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A se naziva spektar matrice A i označava se sa $\sigma(A)$.

Teorem 1 (Hamilton - Cayley) *Ako je $\mathcal{K}_A(\lambda)$ karakteristični polinom kvadratne matrice A tada je $\mathcal{K}_A(A) = 0$.*

Primjer 1.1.35 *Odrediti spektar matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Karakteristični polinom matrice A je:

$$\mathcal{K}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -3 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 2.$$

Rješenja jednačine $\mathcal{K}_A(\lambda) = 0$ su $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{17}\right)$ i $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{17}\right)$ pa je spektar matrice skup

$$\sigma(A) = \left\{1, \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{17}\right)\right\}.$$

Primjer 1.1.36 *Odrediti svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Karakteristični polinom matrice A je:

$$\mathcal{K}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 + 4\lambda - 44.$$

Svojstvene vrijednosti su rješenja jednačine $\mathcal{K}_A(\lambda) = 0$ tj. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 11$.
Odredimo svojstveni vektor X_1 za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = -2$. Neka je

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix}.$$

Imamo

$$(A - \lambda I)X_1 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1^1 + 3x_2^1 + 3x_3^1 \\ 3x_1^1 + x_2^1 + 2x_3^1 \\ 6x_1^1 + 9x_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

odakle dobijamo sistem homogenih jednačina

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 7x_1^1 & + & 3x_2^1 & + & 3x_3^1 & = & 0 \\ 3x_1^1 & + & x_2^1 & + & 2x_3^1 & = & 0 \\ 6x_1^1 & & & + & 9x_3^1 & = & 0 \end{array}\right\}$$

čije je jedno netrivijalno rješenje $(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = (-3, 5, 2)$ pa je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_1

$$X_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Na sličan način dobijamo preostala dva svojstvena vektora

$$X_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.1.37 *Odrediti inverznu matricu matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Karakteristični polinom matrice A je:

$$\mathcal{K}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Na osnovu Teoreme 1 imamo $\mathcal{K}_A(A) = 0$, tj.

$$-A^3 + 4A^2 + 2A + I = \mathbb{O}$$

odakle je

$$I = A^3 - 4A^2 - 2A.$$

Množenjem ove jednakosti sa A^{-1} dobijamo:

$$A^{-1} = A^{-1}(A^3 - 4A^2 - 2A) = A^2 - 4A - 2I$$

pa je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.2 Sistemi linearnih jednačina

Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih je sistem oblika

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}. \tag{1.3}$$

Brojevi $a_{ij} \in \mathbb{R}, (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$ zovu se koeficijenti sistema a brojevi $b_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2, ..., m)$ slobodni koeficijenti sistema (1.3). Rješenje sistema (1.3) je svaka uređena $n-$torka $(x_1, x_2, ..., x_n)$ realnih brojeva koja zadovoljava svaku jednačinu sistema (1.3). Rješenje sistema može da postoji ili ne postoji, a ako postoji, onda ono može da bude jedinstveno ili neodređeno (da sistem ima beskonačno mnogo rješenja).
Sistem (1.3) možemo zapisati u obliku jedne (matrične) jednačine $AX = B$ pri čemu su matrice

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ukoliko je $n = m$ tj. broj nepoznatih jednak broju jednačina, za sistem (1.3) kažemo da je kvadratni sistem linearnih jednačina.

1.2.1 Gausov metod eliminacije

Ideja ovog metoda je svođenje sistema na trougaoni ili trapezni oblik koji je ekvivalentan polaznom sistemu linearnih jednačina, a koji je lakši za rješavanje. Prednost ove metode je što koristimo samo osnovne algebarske operacije.

Primjer 1.2.1 *Gausovim metodom eliminacije riješiti sistem linearnih jednačina*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 17 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \end{array}\right\}.$$

Rješenje. Imamo: [1]

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 17 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ -\ 3\cdot \text{J2+J1} \\ \text{-J3+J1} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 17 \\ & & -16x_2 & + & x_3 & = & 20 \\ & & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ 16\cdot\text{J3}+5\cdot\text{J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 17 \\ & & -16x_2 & + & x_3 & = & 20 \\ & & & & 37x_3 & = & 148 \end{array}\right\}$$

Dakle, početni sistem smo sveli na trougaoni oblik. Iz treće jednačine posljednjeg sistema dobijamo $x_3 = 4$, pa ako to uvrstimo u drugu jednačinu posljednjeg sistema, dobijamo $x_2 = -1$. Iz prve jednačine dobijamo $x_1 = 1$. Dakle, rješenje sistema [2] je $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 4)$.

Primjer 1.2.2 *Gausovim metodom eliminacije riješiti sistem linearnih jednačina*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & = & -9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 10 \end{array}\right\}.$$

Rješenje. Imamo:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & = & -9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{-2J2+J1} \\ \text{-J3+J2} \\ \text{-J4+J1} \end{array}$$

[1] Sa "J1" ćemo označavati prvu jednačinu sistema, sa "J2" drugu, ...
[2] Rješenje sistema je jedinstveno. To je uređene trojka realnih brojeva.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & = & -9 \\ & & x_2 & - & 6x_3 & - & 6x_4 & = & -17 \\ & & -x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ & & 2x_2 & - & 7x_3 & + & 6x_4 & = & -19 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ \text{J3+J2} \\ \text{J4+2J3} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & = & -9 \\ & & x_2 & - & 6x_3 & - & 6x_4 & = & -17 \\ & & & & -5x_3 & - & x_4 & = & -15 \\ & & & & -5x_3 & + & 16x_4 & = & -15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ \text{J3 prepisana} \\ \text{-J4+J3} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & = & -9 \\ & & x_2 & - & 6x_3 & - & 6x_4 & = & -17 \\ & & & & -5x_3 & - & x_4 & = & -15 \\ & & & & & & -17x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Računanjem x_4 iz posljednje jednačine i vraćanjem unazad, dobijamo rješenje sistema $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 3, 0)$.

Primjer 1.2.3 *Gausovim metodom eliminacije riješiti sistem linearnih jednačina*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right\}.$$

Rješenje. Imamo:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{2J2+J1} \\ \text{J3+J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ \text{-J3+J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ \text{-J3+J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$$

Posljednji sistem ima tri nepoznate a dvije jednačine. Zato, jednu nepoznatu biramo proizvoljno. Neka je, npr. $x_3 = \alpha$. Tada su $x_2 = \dfrac{2+3\alpha}{5}$ i $x_1 = \dfrac{7-3\alpha}{5}$. Rješenje sistema je

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7-3\alpha}{5}, \frac{2+3\alpha}{5}, \alpha\right)$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primjer 1.2.4 *Gausovim metodom eliminacije riješiti sistem linearnih jednačina*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Rješenje. Imamo:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{-J2+3J1} \\ \text{-J3+2J1} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ & & 7x_2 & & & + & 2x_4 & = & 9 \\ & & 7x_2 & & & + & 2x_4 & = & 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ \text{-J3-J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ & & 7x_2 & & & + & 2x_4 & = & 9 \end{array}\right\}$$

Posljednji sistem ima dvije jednačine a četiri nepoznate pa dvije nepoznate biramo proizvoljno. Ali, ipak ne možemo uzeti bilo koje nepoznate. Recimo, ako bismo proizvoljno odabrali x_2 i x_4 onda zbog druge jednačine sistem ne bi imao smisla.

Neka su recimo $x_3 = \alpha$ i $x_4 = \beta$. Sada je lahko zaključiti da su $x_2 = \dfrac{9-2\beta}{7}$ i $x_1 = \dfrac{17-7\alpha-3\beta}{7}$. Rješenje sistema je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{17-7\alpha-3\beta}{7}, \frac{9-2\beta}{7}, \alpha, \beta\right)$$

gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

Primjer 1.2.5 *Gausovim metodom eliminacije riješiti sistem linearnih jednačina*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 12 \end{array}\right\}.$$

Rješenje:. Imamo:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{-J2+3J1} \\ \text{-J3+4J1} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & 5x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & -1 \\ & & 5x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ \text{-J3-J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & 5x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & -1 \\ & & & & & & 0 & = & -1 \end{array}\right\}$$

Posljednja jednakost je netačna pa dati sistem nema rješenja.

Primjer 1.2.6 *Gausovim metodom eliminacije riješiti sistem linearnih jednačina*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & -7 \end{array}\right\}.$$

Rješenje. Imamo:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{-2J2+J1} \\ \text{-J3+2J1} \\ \text{-J3+J2} \\ \text{2J5+3J1} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & -x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & -3x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ & & -5x_2 & + & 5x_3 & = & -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ \text{3J3+J2} \\ \text{J4+J2} \\ \text{3J5+5J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & 10x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Računanjem x_3 iz posljednje jednačine i vraćanjem unazad, dobijamo rješenje sistema $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$.

1.2.2 Kvadratni sistemi linearnih jednačina čija determinanta nije jednaka nuli

Posmatraćemo kvadratne sisteme linearnih algebarskih jednačina tj. sisteme oblika

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

$(a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ za $i, j = 1, 2, ..., n)$ čija determinanta nije jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dva su osnovna načina rješavanja ovakvih sistema a to su metoda determinanti i matrična metoda.

Metoda determinanti

Teorem 2 *Neka je $D = detA$ i $D_{x_i} = detA_i$ pri čemu je matrica A_i matrica koja se dobije zamjenom i-te kolone matrice A sa matricom kolonom B.*

♢ *Ako je $D \neq 0$ tada sistem (1.4) ima jedinstveno rješenje $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dato sa*

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}, (i = 1, 2, ..., n)$$

♢ *Ako je $D = 0$ i $D_{x_i} \neq 0$ za $i = 1, 2, ..., n$, tada je sistem (1.4) nesaglasan, tj. nema rješenja.*

♢ *Ako je $D = 0$ i $D_{x_i} = 0$ za $i = 1, 2, ..., n$, tada sistem (1.4) ima beskonačno mnogo rješenja.*

Posljednja teorema je poznata kao *Kramerova* [3] *teorema* za rješavanje kvadratnih sistema linearnih algebarskih jednačina, a ako sistem jednačina rješavamo koristeći ovu teoremu, onda kažemo da sistem rješavamo Kramerovim metodom ili metodom determinanti.

Primjer 1.2.7 *Riješiti sistem jednačina metodom determinanti:*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Rješenje. Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

pa sistem ima jedinstvaneo rješenje. Budući da su

$$\begin{aligned} D_{x_1} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \\ D_{x_2} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ D_{x_3} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6, \end{aligned}$$

tada su

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{3}{-3} = -1, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{0}{-3} = 0, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = \frac{6}{-3} = 2$$

pa je rješenje sistema $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 2)$.

Primjer 1.2.8 *Riješiti sistem jednačina metodom determinanti:*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \\ 6x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}\right\}$$

Rješenje. Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -33 \neq 0$$

pa je sistem ima jedinstvano rješenje. Budući da su

$$\begin{aligned} D_{x_1} &= \begin{vmatrix} 8 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \\ D_{x_2} &= \begin{vmatrix} 3 & 8 & -3 \\ 6 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -53, \\ D_{x_3} &= \begin{vmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -22 \end{aligned}$$

[3] Gabriel Cramer (1704. - 1752.), švajcarski matematičar

tada su

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{4}{33}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{53}{33}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = \frac{2}{3}$$

pa je rješenje sistema $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4}{33}, \frac{53}{33}, \frac{2}{3}\right)$.

Matrična metoda

Sistem (1.4) možemo zapisati u matričnom obliku $AX = B$, tj. napisati ga u obliku jedne (matrične) jednačine. Ako je matrica A regularna (tj. $detA \neq 0$), tada je rješenje posljednje matrične jednačine matrica $X = A^{-1}B$ a elementi te matrice su upravo rješenja sistema (1.4).

Primjer 1.2.9 *Riješiti sistem jednačina matričnom metodom:*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 16 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & - & x_3 & = & 10 \end{array}\right\}$$

Rješenje:. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Tada je sistem ekvivalentan matričnoj jednačini $AX = B$. Matrica A je regularna jer je $detA = -104$. To znači da je dati sistem saglasan. Adjungovana matrica matrice A je

$$A^* = \begin{bmatrix} -11 & 61 & -5 \\ 1 & -15 & -9 \\ -12 & -28 & 4 \end{bmatrix}$$

pa je inverzna matrica matrice A

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^* = \begin{bmatrix} 11/104 & -61/104 & 5/104 \\ -1/104 & 15/104 & 9/104 \\ 3/26 & 7/26 & -1/26 \end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične jednačine je matrica

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 11/104 & -61/104 & 5/104 \\ -1/104 & 15/104 & 9/104 \\ 3/26 & 7/26 & -1/26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, rješenje sistema je $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 2)$.

Primjer 1.2.10 *Riješiti sistem jednačina matričnom metodom*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 21 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -10 \\ & & 7x_2 & + & 6x_3 & = & 11 \end{array}\right\}$$

Rješenje. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 21 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Tada je sistem ekvivalentan matričnoj jednačini $AX = B$. Matrica A je regularna jer je $detA = 168$. To znači da je dati sistem saglasan. Adjungovana matrica matrice A je

$$A^* = \begin{bmatrix} 27 & 60 & 3 \\ -6 & 24 & 18 \\ 7 & -28 & 7 \end{bmatrix}$$

pa je inverzna matrica matrice A

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^* = \begin{bmatrix} 9/56 & 5/14 & 1/56 \\ -1/28 & 1/7 & 3/28 \\ 1/24 & -1/6 & 1/24 \end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične jednačine je matrica

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 9/56 & 5/14 & 1/56 \\ -1/28 & 1/7 & 3/28 \\ 1/24 & -1/6 & 1/24 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, rješenje sistema je $(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 3)$.

1.2.3 Croneker-Capeli-jev stav

Ovaj metod se obično koristi za rješavanje kvadratnih sistema linearnih algebarskih jenačina čija je determinanta jednaka nuli i sve vrste pravougaonih i trapeznih sistema. Glavna je ideja da se takav sistem, ako je moguće, svede na kvadratni sistem linearnih jednačina čija je detreminanta različita do nule, a za rješavanje takvih možemo primijeniti metodu determinanti i matričnu metodu. Naravno, ovom metodom možemo rješavati i kvadratne sisteme čija je determinanta različita od nule, čime se dobija ekvivalentni sistem trougaonog oblika. U svemu tome, pomaže nam sljedeća

Teorem 3 *Neka je A matrica koeficijenta sistema i A_p proširena matrica sistema*[4]*. Tada vrijedi:*

- ♢ *Sistem linearnih algebarskih jednačina (1.3) je saglasan akko je $rang(A) = rang(A_p)$.*
- ♢ *Ako je $r = rang(A) = rang(A_p)$ tada je sistem (1.3) ekvivalentan sistemu koji se dobije uzimanjem bilo kojih r linearno nezavisnih jednačina is sistema (1.3).*
- ♢ *Ako je $m = n$ tj. broj jednačina jednak broju nepoznatih, tada sistem (1.3) ima jedinstveno rješenje akko je matrica A regularna.*

Primjer 1.2.11 *Ispitati saglasnost sistema i u slučaju da je saglasan riješiti ga:*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 9 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & = & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 7 \end{array}\right\}.$$

Rješenje. Matrica koeficijenata i proširena matrica koeficijenata sistema su:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

[4] Matrica koja se dobije dodavanjem matrice kolone B matrici A

Izvršimo elementarne transformacije matrice A_p na sljedeći način

$$
\begin{aligned}
A_p &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{V1 prepisana} \\ \text{4V2+V1} \\ \text{V3+3V2} \\ \text{V4-V3} \\ \text{V5+2V2} \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{V1 prepisana} \\ \text{V2 prepisana} \\ \text{V3-V2} \\ \text{V4 prepisana} \\ \text{V5-V3} \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{V1 prepisana} \\ \text{V2 prepisana} \\ \text{V3 prepisana} \\ \text{V4-V3} \\ \text{V5 prepisana} \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Odavdje zaključujemo da je $rang(A) = rang(A_p) = 3$ pa je sistem saglasan. Pomoću posljednje matrice formirajmo novi sistem:

$$
\left.\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 9 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & & - & 6x_3 & = & 0 \end{array}\right\}
$$

koji je kvadrtni sistem čija determinanta nije jednaka nuli. Rješenje sistema je $(x_1, x_2, x_3) = (1, 5, 0)$.

Primjer 1.2.12 *Ispitati saglasnost sistema*

$$
\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\ -2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -6 \end{array}\right\}
$$

i u slučaju da je saglasan riješiti ga metodom determinanti.

Rješenje. Budući da je u pitanju pravougaoni sistem, ne možemo odmah primijeniti metod determinanti jer matrica koeficijenata sistema nije kvadratna, pa prema tome nema determinantu. Matrica koeficijenata i proširena matrica koeficijenata sistema su:

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & -1 & 12 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}.
$$

Izvršimo elementarne transformacije matrice A_p na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
A_p &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & -1 & 12 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{V1 prepisana} \\ \text{4V2+3V1} \\ \text{2V3+V1} \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & -1 & 12 \\ 0 & 5 & 18 & -7 & 16 \\ 0 & -9 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{V1 prepisana} \\ \text{V2 prepisana} \\ \text{5V3+9V2} \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & -1 & 12 \\ 0 & 5 & 18 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 202 & -58 & 144 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Odavdje zaključujemo da je $rang(A) = rang(A_p) = 3$ pa je sistem saglasan. Pomoću posljednje matrice formirajmo novi sistem

$$
\left.\begin{array}{rcrcrcrcr}
4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 12 \\
 & & 5x_2 & + & 18x_3 & - & 7x_4 & = & 16 \\
 & & & & 202x_3 & - & 58x_4 & = & 144
\end{array}\right\}
$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu. Budući da sistem ima 4 nepoznate a $rang(A) = rang(A_p) = 3$, tada jednu nepoznatu biramo proizvoljno. Neka je npr. $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$. Tada dobijamo kvadratni sistem oblika

$$
\left.\begin{array}{rcrcrcl}
4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 12+\alpha \\
 & & 5x_2 & + & 18x_3 & = & 16+7\alpha \\
 & & & & 202x_3 & = & 144+58\alpha
\end{array}\right\}.
$$

Riješimo ovaj sistem metodom detrminanti. Imamo

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 202 \end{vmatrix} = 4040, \\
D_{x_1} &= \begin{vmatrix} 12+\alpha & 3 & 6 \\ 16+7\alpha & 5 & 18 \\ 144+58\alpha & 0 & 202 \end{vmatrix} = 5880 - 1840\alpha, \\
D_{x_2} &= \begin{vmatrix} 4 & 12+\alpha & 6 \\ 0 & 16+7\alpha & 18 \\ 0 & 144+58\alpha & 202 \end{vmatrix} = 2560 + 1480\alpha, \\
D_{x_3} &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 12+\alpha \\ 0 & 5 & 16+7\alpha \\ 0 & 0 & 144+58\alpha \end{vmatrix} = 5880 - 1840\alpha
\end{aligned}
$$

pa su

$$
x_1 = \frac{5880-1840\alpha}{4040}, \ \ x_2 = \frac{2560-1840\alpha}{4040}, \ \ x_3 = \frac{2880-1160\alpha}{4040}, \ \ x_4 = \alpha.
$$

Rješenje sistema je

$$
(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5880-1840\alpha}{4040}, \frac{2560-1840\alpha}{4040}, \frac{2880-1160\alpha}{4040}, \alpha \right)
$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljno.

Primjer 1.2.13 *Ispitati saglasnost sistema*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & & & = & 5 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 3 \end{array}\right\}$$

i u slučaju da je saglasan riješiti ga metodom determinanti.

Rješenje. Matrica koeficijenata i proširena matrica koeficijenata sistema su:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izvršimo elementarne transformacije matrice A_p na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{V1 prepisana} \\ \text{3V2+2V1} \\ \text{V3 prepisana} \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{V1 prepisana} \\ \text{V2 prepisana} \\ \text{V3+V2} \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 & -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Odavdje zaključujemo da je $rang(A) = rang(A_p) = 3$ pa je sistem saglasan. Pomoću posljednje matrice formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ & & -x_2 & - & 7x_3 & - & 5x_4 & + & 2x_5 & = & -11 \\ & & & & -7x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & = & -8 \end{array}\right\}$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu. Budući da sistem ima 5 nepoznatih a $rang(A) = rang(A_p) = 3$, tada dvije nepoznate biramo proizvoljno. Neka je npr. $x_4 = \alpha$ i $x_5 = \beta$. Tada dobijamo kvadratni sistem oblika

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 + 4\alpha - \beta \\ & & -x_2 & - & 7x_3 & = & -11 + 5\alpha - 2\beta \\ & & & & -7x_3 & = & -8 + 4\alpha - 3\beta \end{array}\right\}.$$

Riješimo ga metodom determinanti. Imamo:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 21, \\ D_{x_1} &= \begin{vmatrix} 2 + 4\alpha - \beta & 1 & 1 \\ -11 + 5\alpha - 2\beta & -1 & -7 \\ -8 + 4\alpha - 3\beta & 0 & -7 \end{vmatrix} = -15 + 39\alpha - 3\beta \\ D_{x_2} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 + 4\alpha - \beta & 1 \\ 0 & -11 + 5\alpha - 2\beta & -7 \\ 0 & 144 + 58\alpha & -7 \end{vmatrix} = 63 - 21\alpha - 21\beta, \\ D_{x_3} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 + 4\alpha - \beta \\ 0 & -1 & -11 + 5\alpha - 2\beta \\ 0 & 0 & -8 + 4\alpha - 3\beta \end{vmatrix} = 24 - 12\alpha + 9\beta \end{aligned}$$

pa je rješenje sistema

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\left(\frac{-15+39\alpha-3\beta}{21},\frac{63-21\alpha-21\beta}{21},\frac{24-12\alpha+9\beta}{21},\alpha,\beta\right)$$

pri čemu su $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ proizvoljni.

Primjer 1.2.14 *Ispitati saglasnost sistema*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 21 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -10 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}\right\}$$

i u slučaju da je sistem saglasan riješiti ga:
a) metodom determinanti,
b) matričnom metodom.

Rješenje. Ako odmah primijenimo metod determinanti, dobićemo $D=D_{x_1}=D_{x_2}=D_{x_3}=0$ a to znači da sistem ima beskonačno mnogo rješenja. Ipak, potrebno je naći i "oblik" rješenja datog sistema. Zato se koristimo sljedećim postupkom. Matrica koeficijenata i proširena matrica koeficijenata sistema su:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix},\quad A_p=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 & 21 \\ 1 & 1 & -3 & -10 \\ 5 & -2 & 3 & 11 \end{bmatrix}.$$

Izvršimo elementarne transformacije matrice A_p na sljedeći način:

$$\begin{array}{rcll} A_p & = & \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 & 21 \\ 1 & 1 & -3 & -10 \\ 5 & -2 & 3 & 11 \end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{V1 prepisana}\\ \text{-4V2+V1}\\ \text{-4V3+5V1}\end{array} \\ & \sim & \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 & 21 \\ 0 & -7 & 18 & 16 \\ 0 & -7 & 18 & 16 \end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{V1 prepisana}\\ \text{V2 prepisana}\\ \text{-V3+V2}\end{array} \\ & \sim & \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 & 21 \\ 0 & -7 & 18 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \end{array}$$

Odavdje zaključujemo da je $rang(A)=rang(A_p)=2$ pa je sistem saglasan. Pomoću posljednje matrice formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 21 \\ & & -7x_2 & + & 18x_3 & = & 61 \end{array}\right\}$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu. Budući da sistem ima 3 nepoznate a $rang(A)=rang(A_p)=2$, tada jednu nepoznatu biramo proizvoljno. Neka je npr. $x_3=\alpha\in\mathbb{R}$. Tada dobijamo kvadratni sistem oblika

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & - & 3x_2 & = & 21-6\alpha \\ & & -7x_2 & = & 61-18\alpha \end{array}\right\}.$$

a) Riješimo ga metodom determinanti. Imamo

$$\begin{array}{rcl} D & = & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -28 \\ D_{x_1} & = & \begin{vmatrix} 21-6\alpha & -3 \\ 61-18\alpha & -7 \end{vmatrix} = 36-12\alpha, \\ D_{x_2} & = & \begin{vmatrix} 4 & 21-6\alpha \\ 0 & 61-18\alpha \end{vmatrix} = 244-72\alpha \end{array}$$

pa je rješenje sistema

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3\alpha - 9}{7}, \frac{13\alpha - 61}{7}, \alpha\right)$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljno.
$b)$ Riješimo ga matričnom metodom. Ako označimo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 21 - 6\alpha \\ 61 - 18\alpha \end{bmatrix}$$

tada je sistem ekvivalentan matričnoj jednačini $AX = B$ čije je rješenje matrica $X = A^{-1}B$. Inverzna matrica matrice A je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -3/28 \\ 0 & -1/7 \end{bmatrix}$$

pa je rješenje

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/4 & -3/28 \\ 0 & -1/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 - 6\alpha \\ 61 - 18\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\alpha-9}{7} \\ \frac{13\alpha-61}{7} \end{bmatrix}$$

pa je rješenje sistema

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3\alpha - 9}{7}, \frac{13\alpha - 61}{7}, \alpha\right)$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljno.

Primjer 1.2.15 *Ispitati saglasnost sistema*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & = & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 14 \end{array}\right\}$$

i u slučaju da je sistem saglasan riješiti ga:
a) metodom determinanti,
b) matričnom metodom.

Rješenje. Ako odmah primijenimo metod determinanti, dobićemo $D = D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = D_{x_4} = 0$ a to znači da sistem ima beskonačno mnogo rješenja. Matrica koeficijenata i proširena matrica koeficijenata sistema su:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 9 & 2 & 14 \end{bmatrix}.$$

Izvršimo elementarne transformacije matrice A_p na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A_p \quad &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 9 & 2 & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{V1 prepisana} \\ \text{-2V2+V1} \\ \text{-2V3+3V1} \\ \text{-V4+V2} \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 12 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & 12 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & -12 & -3 & -16 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{V1 prepisana} \\ \text{V2 prepisana} \\ \text{V3-V2} \\ \text{V4-V2} \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 12 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odavdje zaključujemo da je $rang(A) = rang(A_p) = 2$ pa je sistem saglasan. Pomoću posljednje matrice formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 12 \\ & & x_2 & + & 12x_3 & + & 3x_4 & = & 16 \end{array}\right\}$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu. Budući da sistem ima 4 nepoznate a $rang(A) = rang(A_p) = 2$, tada dvije nepoznate biramo proizvoljno. Neka su npr. $x_3 = \beta$, $x_4 = \alpha$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Tada dobijamo kvadratni sistem oblika

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 12 - \alpha - 6\beta \\ & & x_2 & = & 16 - 3\alpha - 12\beta \end{array}\right\}$$

a) Riješimo ga metodom determinanti. Imamo:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \\ D_{x_1} &= \begin{vmatrix} 12 - \alpha - 6\beta & 3 \\ 16 - 3\alpha - 12\beta & 1 \end{vmatrix} = -36 + 8\alpha + 30\beta, \\ D_{x_2} &= \begin{vmatrix} 2 & 12 - \alpha - 6\beta \\ 0 & 16 - 3\alpha - 12\beta \end{vmatrix} = 32 - 6\alpha - 24\beta \end{aligned}$$

pa je rješenje sistema

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-18 + 4\alpha + 15\beta, 16 - 3\alpha - 12\beta, \beta, \alpha)$$

pri čemu su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni.
b) Riješimo ga matričnom metodom. Ako označimo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12 - \alpha - 6\beta \\ 16 - 3\alpha - 12\beta \end{bmatrix}$$

tada je sistem ekvivalentan matričnoj jednačini $AX = B$ čije je rješenje matrica $X = A^{-1}B$. Inverzna matrica matrice A je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

pa je rješenje

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 - \alpha - 6\beta \\ 16 - 3\alpha - 12\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 + 4\alpha + 15\beta \\ 16 - 3\alpha - 12\beta \end{bmatrix}.$$

Rješenje sistema je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-18 + 4\alpha + 15\beta, 16 - 3\alpha - 12\beta, \beta, \alpha)$$

pri čemu su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

1.2.4 Homogeni sistemi linearnih jednačina

Homogeni sistem linearnih jednačina je sistem oblika

$$\left.\begin{array}{rcrcccrcr} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

pri čemu su ($a_{ij} \in \mathbb{R}$ za $1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant n$). Ovakav sistem uvijek ima rješenje oblika $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$ koje se naziva trivijalno rješenje homogenog sistema. Postavlja se pitanje da li sistem (1.5) pored trivijalnog ima i neko drugo rješenje. Odgovor na to pitanje u slučaju kvadratnih homogenih sistema linearnih jednačina daje sljedeća teorema:

Teorem 4 *Vrijedi:*

♢ *Ako je determinanta sistema različita od nule, tada sistem ima samo trivijalno rješenje.*

♢ *Ako je determinanta sistema jednaka nuli, tada sistem pored trivijalnog ima i netrivijalno rješenje.*

Primjer 1.2.16 *Riješiti sistem homogenih jednačina:*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 9x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 12x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Rješenje. Pošto je determinanta sistema

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -9 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 12 \end{vmatrix} = -156 \neq 0$$

to dati sistem ima samo trivijalno rješenje, tj. $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

Primjer 1.2.17 *Riješiti sistem homogenih jednačina:*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Rješenje. Pošto je determinanta sistema

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 6 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

to dati sistem pored trivijalnog ima i netrivijalno rješenje. Odredimo ga Gausovom metodom:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{-J2+6J1} \\ \text{-J3+5J1} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ & & -22x_2 & + & 29x_3 & = & 0 \\ & & -22x_2 & + & 29x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ \text{-J3+J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ & & -22x_2 & + & 29x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Posljednji sistem ima dvije jednačine a tri nepoznate. Zato jednu nepoznatu biramo proizvoljno. Neka je npr. $x_3 = \alpha$. Tada lahko dobijamo da su $x_2 = \dfrac{29\alpha}{22}$ i $x_1 = -\dfrac{8\alpha}{11}$. Dakle, rješenje sistema je

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{8\alpha}{11}, \frac{29\alpha}{22}, \alpha\right)$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljno.

Primjer 1.2.18 *Odrediti za koju vrijednost parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

ima i netrivijalno rješenje.

Rješenje. Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$$

i

$$D = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a+2) = 0 \Leftrightarrow (a = 1 \vee a = -2).$$

Dakle, za $a = 1$ ili za $a = -2$ sistem pored trivijalnog ima i netrivijalno rješenje.
Za $a = 1$ sistem ima oblik

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

koji je ekvivalentan jednačini

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

čije je rješenje

$$(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$$

pri čemu su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni.
Za $a = -2$ sistem ima oblik

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Riješimo ga Gaussovom metodom:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{2J2+J1} \\ \text{J3-J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{J1 prepisana} \\ \text{J2 prepisana} \\ \text{J3+J2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Rješenje sistema je

$$(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \alpha, \alpha)$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljno.

Primjer 1.2.19 *Riješiti sistem homogenih jednačina:*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Rješenje: Sistem sigurno ima trivijalno rješenje. Provjerimo da li ima i netrivijalnih. Neka je $x_3 = \alpha \neq 0$ pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ proizvoljno. Ako obje jednačine podijelimo sa α i uvedemo smjene $u = \frac{x_1}{\alpha}$ i $v = \frac{x_2}{\alpha}$, dobićemo sistem

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 5u & + & 4v & = & 7 \\ u & + & v & = & 2 \end{array}\right\}$$

čije je rješenje $u = v = 1$. Iz $\frac{x_1}{\alpha} = 1$ i $\frac{x_2}{\alpha} = 1$ dobijamo $x_1 = x_2 = \alpha$, pa je netrivijalno rješenje sistema

$$(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \alpha, \alpha)$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ proizvoljno.

1.2.5 Sistemi linearnih jednačina sa parametrima

Primjer 1.2.20 *U zavisnosti od parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ diskutovati rješenja sistema*

$$\left.\begin{array}{rcrcr} \lambda x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \\ 9x_1 & + & \lambda x_2 & = & 3 \end{array}\right\}.$$

Rješenje. Izračunajmo determinanate D, D_{x_1}, D_{x_2}.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 9 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 36 = (\lambda - 6)(\lambda + 6) \\ D_{x_1} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 12 = 2(\lambda - 6) \\ D_{x_2} &= \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 18 = 3(\lambda - 6). \end{aligned}$$

Vidimo da je $D = 0$ akko je $\lambda = \pm 6$.
Diskusija:

- Ako je $\lambda \neq \pm 6$ tada sistem ima jedinstveno rješenje dato sa

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{2(\lambda - 6)}{(\lambda - 6)(\lambda + 6)} = \frac{2}{\lambda + 6}$$

$$x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{3(\lambda - 6)}{(\lambda - 6)(\lambda + 6)} = \frac{3}{\lambda + 6}.$$

- Ako je $\lambda = 6$ tada je $D = 0$ ali i $D_{x_1} = D_{x_2} = 0$ pa sistem ima beskonačno mnogo rješenja. Odredimo oblik tih rješenja. Za $\lambda = 6$ sistem ima oblik

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \\ 9x_1 & + & 6x_2 & = & 3 \end{array}\right\}.$$

ove dvije jednačine su linearno zavisne pa sistem možemo zamijeniti sa jednom jednačinom. Birajući da je $x_2 = \alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ iz prve jednačine dobijamo $x_1 = \frac{1 - 2\alpha}{3}$. Dakle, rješenje sistema je

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{1 - 2\alpha}{3}, \alpha\right)$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljno.

- Ako je $\lambda = -6$ tada je $D = 0$ ali $D_{x_1} \neq 0$ i $D_{x_2} \neq 0$ pa sistem nema rješenja.

Primjer 1.2.21 *U zavisnosti od realnog parametra λ diskutovati rješenja sistema*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2 \end{array}\right\}.$$

Rješenje. Izračunajmo determinante $D, D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3}$:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda^3 + 1 + 1\right) - (\lambda + \lambda + \lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 \\ &= \lambda^3 - \lambda - 2\lambda + 2 = \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) - 2(\lambda - 1) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda(\lambda + 1) - 2) \\ &= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right) = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 2\lambda - \lambda - 2\right) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda(\lambda + 2) - (\lambda + 2)) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{x_1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda\right) - \left(\lambda^3 + 1 + \lambda^2\right) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -\left(\lambda^3 - \lambda^2\right) + (\lambda - 1) \\ &= -\lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)\left(1 - \lambda^2\right) \\ &= (\lambda - 1)(1 - \lambda)(1 + \lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{x_2} &= \left|\begin{array}{ccc} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{array}\right| \begin{array}{cc} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \\ 1 & \lambda^2 \end{array} = \left(\lambda^3 + 1 + \lambda^2\right) - \left(\lambda + \lambda^3 + \lambda\right) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{x_3} &= \left|\begin{array}{ccc} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{array} = \left(\lambda^4 + \lambda + 1\right) - \left(\lambda + \lambda^2 + \lambda^2\right) \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 - 1\right)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

Dakle, $D = 0$ ako je $\lambda = -2$ ili $\lambda = 1$.
Diskusija:

- Ako je $\lambda \neq -2$ i $\lambda \neq 1$, tada sistem ima rješenje dato sa

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{-(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = -\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2} \\ x_2 &= \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda + 2} \\ x_3 &= \frac{D_{x_3}}{D} = \frac{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}. \end{aligned}$$

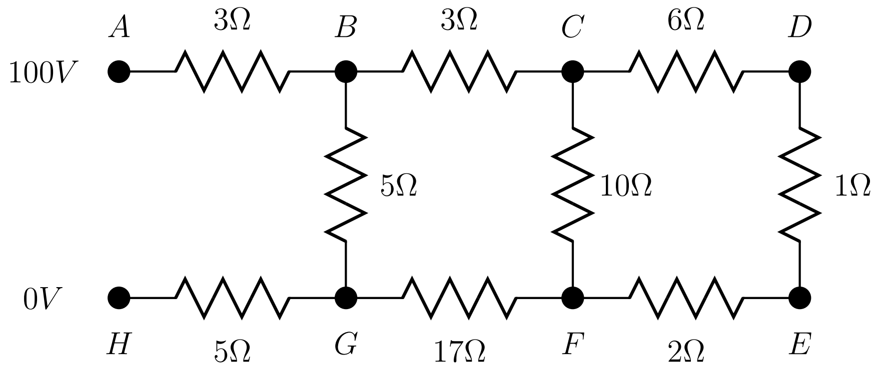
- Ako je $\lambda = -2$ tada je $D = 0$ ali $D_{x_1} = 9 \neq 0$ tada sistem nema rješenja.
- Ako je $\lambda = 1$ tada je $D = D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = 0$ tada sistem ima beskonačno mnogo rješenja. Uvrštavajući $\lambda = 1$, dobijamo sistem od tri jednačine koje su identične, pa se rješavanje sistema svodi na rješavanje jedne jednačine sa tri nepoznate. Odaberimo $x_2 = \alpha$ i $x_3 = \beta$ gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je $x_1 = 1 - \alpha - \beta$. Dakle, rješenje sistema je

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta)$$

gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

1.2.6 Primjene sistema linearnih jednačina

Primjer 1.2.22 *Izračunati potencijale u električnoj mreži:*



Rješenje. Iz Ohmovog zakona jačina struje koja teče od tačke i do tačke j jednaka je $I_{ij} = \dfrac{v_i - v_j}{R_{ij}}$, pri čemu je v_i potencijal u tački i a v_j potencijal u tački j, $(i, j \in \{A, B, C, D, E, F, G, H\}.)$ S druge strane, prema Kirchoffovom zakonu, suma jačina struja koje završavaju u jednom čvoru mora biti jednaka nuli, i to vrijedi za svaki čvor mreže.
Primijenjujući ta dva zakona na čvor B, dobijamo:

$$I_{AB} + I_{GB} + I_{CB} = 0$$

odnosno

$$\frac{v_A - v_B}{R_{AB}} + \frac{v_G - v_B}{R_{GB}} + \frac{v_C - v_B}{R_{CB}} = 0$$

tj.

$$\frac{v_A - v_B}{3} + \frac{v_G - v_B}{5} + \frac{v_C - v_B}{3} = 0.$$

Sređivanjem, dobijamo jednačinu

$$13v_B - 5v_C - 3v_G = 500.$$

Primjenom istih zakona na preostalih pet čvorova, dobijamo još pet jednačina. Nepoznate potencijale v_i dobijamo rješavajući sistem od šest jednačina sa šest nepoznatih koji ima oblik

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
13v_B & - & 5v_C & & & & & & & - & 3v_G & = & 500 \\
10v_B & - & 18v_C & + & 5v_D & & & + & 3v_F & & & = & 0 \\
 & & v_C & - & 7v_D & + & 6v_E & & & & & = & 0 \\
 & & & & 2v_D & - & 3v_E & + & v_F & & & = & 0 \\
 & & 17v_C & & & + & 85v_E & - & 112v_F & + & 10v_G & = & 0 \\
17v_B & & & & & & & + & 5v_F & - & 39v_G & = & 0
\end{array}\right\}$$

čije je rješenje dato sa

$$(v_B, v_C, v_D, v_E, v_F, v_G) = (75.33, 71.18, 66.82, 66.09, 64.63, 41.12).$$