Matematika I

Elvis Baraković[1]

30. listopada 2018.

[1]Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika, Univerzitetska 4 75000 Tuzla;http://pmf.untz.ba/staff/elvis.barakovic/

Sadržaj

Poglavlje 1

Skup realnih brojeva

1.1 Matematička indukcija

Primjer 1.1.1 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Rješenje.
1) Za $n = 1$ jednakost vrijedi jer je $1 = 1^2 = 1$.
2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n = k + 1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 1.1.2 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2.$$

Rješenje.
1) Za $n = 1$ jednakost vrijedi jer je $1^3 = \left(\frac{1(1 + 1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$.
2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k + 1)}{2}\right)^2.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k + 1)^3 = \left(\frac{(k + 1)(k + 2)}{2}\right)^2$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+\quad \cdots \quad &+(k+1)^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 = \\
&= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 = \\
&= \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2\left(k^2+4(k+1)\right)}{4} = \\
&= \frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \\
&= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n=k+1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 1.1.3 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Rješenje.
1) Za $n=1$ jednakost vrijedi jer je

$$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}.$$

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \\
=\ &\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} \\
=\ &\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \\
=\ &\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{(2k+1)\cdot(k+1)}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} = .
\end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n=k+1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 1.1.4 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n\,(n+1)}{2\,(2n+1)}.$$

Rješenje.
1) Za $n=1$ jednakost vrijedi jer je

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1\cdot(1+1)}{2\cdot(2\cdot 1+1)}=\frac{1}{3}.$$

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. da vrijedi

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k\,(k+1)}{2\,(2k+1)}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{(k+1)\,(k+2)}{2\,(2k+3)}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
&\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\\
=\;&\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)}\\
=\;&\frac{k\,(k+1)}{2\,(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\,(2k+3)}=\frac{k\,(k+1)\,(2k+3)+2\,(k+1)^2}{2\,(2k+1)\,(2k+3)}=\\
=\;&\frac{(k+1)\,(k\,(2k+3)+2\,(k+1))}{2\,(2k+1)\,(2k+3)}=\frac{(k+1)\,(2k^2+3k+2k+2)}{2\,(2k+1)\,(2k+3)}=\\
=\;&\frac{(k+1)\,(2k^2+5k+2)}{2\,(2k+1)\,(2k+3)}=\frac{(k+1)\,(k+2)\,(2k+1)}{2\,(2k+1)\,(2k+3)}=\\
=\;&\frac{(k+1)\,(k+2)}{2\,(2k+3)}=.
\end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n=k+1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 1.1.5 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2\,(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Rješenje.
1) Za $n=1$ jednakost vrijedi jer je

$$\frac{3}{4}=1-\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}.$$

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. da vrijedi

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2}=1-\frac{1}{(k+1)^2}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2k+3}{(k+1)^2 (k+2)^2} = 1 - \frac{1}{(k+2)^2}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \quad \cdots \quad + \frac{2k+3}{(k+1)^2 (k+2)^2} &= \\ &= \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2k+1}{k^2 (k+1)^2} + \frac{2k+3}{(k+1)^2 (k+2)^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2k+3}{(k+1)^2 (k+2)^2} = \\ &= 1 - \frac{(k+2)^2 - (2k+3)}{(k+1)^2 (k+2)^2} = 1 - \frac{k^2 + 4k + 4 - 2k - 3}{(k+1)^2 (k+2)^2} = \\ &= 1 - \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)^2 (k+2)^2} = 1 - \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2 (k+2)^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{(k+2)^2} = . \end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n = k + 1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 1.1.6 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3(3^n - 1) - 2n}{4 \cdot 3^n}.$$

Rješenje.
1) Za $n = 1$ jednakost vrijedi jer je

$$\frac{1}{3} = \frac{3(3-1) - 2 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{k}{3^k} = \frac{3(3^k - 1) - 2k}{4 \cdot 3^k}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3(3^{k+1} - 1) - 2(k+1)}{4 \cdot 3^{k+1}}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{k+1}{3^{k+1}} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \\ = \frac{3(3^k - 1) - 2k}{4 \cdot 3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} &= \frac{3 \cdot 3(3^k - 1) - 6k + 4(k+1)}{4 \cdot 3^{k+1}} \\ = \frac{3(3^{k+1} - 3) - 6k + 4(k+1)}{4 \cdot 3^{k+1}} &= \frac{3(3^{k+1} - 1) - 6 - 6k + 4(k+1)}{4 \cdot 3^{k+1}} \\ = \frac{3(3^{k+1} - 1) - 6(k+1) + 4(k+1)}{4 \cdot 3^{k+1}} &= \frac{3(3^{k+1} - 1) - 2(k+1)}{4 \cdot 3^{k+1}}. \end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n = k + 1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 1.1.7 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin (2n-1) x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Rješenje.
1) Za $n = 1$ jednakost vrijedi jer je $\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin x$.
2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin (2k-1) x = \frac{\sin^2 kx}{\sin x}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin (2k+1) x = \frac{\sin^2 (k+1) x}{\sin x}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
& \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin (2k+1) x = \\
= \; & \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin (2k-1) x + \sin (2k+1) x = \\
= \; & \frac{\sin^2 kx}{\sin x} + \sin (2k+1) x = \frac{\sin^2 kx + \sin x \cdot \sin (2k+1) x}{\sin x} = \\
= \; & \frac{\sin^2 kx + \frac{1}{2}\left[\cos 2kx - \cos (2kx + 2x)\right]}{\sin x} = \\
= \; & \frac{\frac{2\sin^2 kx + \cos 2kx - \cos(2kx+2x)}{2}}{\sin x} = \frac{2\sin^2 kx + \cos 2kx - \cos 2(k+1) x}{2\sin x} = \\
= \; & \frac{2\sin^2 kx + \cos^2 kx - \sin^2 kx - \cos^2 (k+1) x + \sin^2 (k+1) x}{2\sin x} = \\
= \; & \frac{\sin^2 kx + \cos^2 kx - \cos^2 (k+1) x + \sin^2 (k+1) x}{2\sin x} = \\
= \; & \frac{1 - \cos^2 (k+1) x + \sin^2 (k+1) x}{2\sin x} = \frac{\sin^2 (k+1) x + \sin^2 (k+1) x}{2\sin x} = \\
= \; & \frac{2\sin^2 (k+1) x}{2\sin x} = \frac{\sin^2 (k+1) x}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n = k + 1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 1.1.8 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na, \quad (a > 0).$$

Rješenje.
1) Za $n = 1$ nejednakost vrijedi jer je $(1 + a)^1 \geq 1 + a$.
2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &= (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka)\\ &= 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a\end{aligned}$$

Dakle, nejednakost vrijedi i za $n = k+1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da nejednakost vrijedi za svaki prirodan broj.

Primjer 1.1.9 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Rješenje:
1) Za $n = 1$ nejednakost vrijedi jer je $\dfrac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$. 2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\\ =\ &\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\\ \geq\ &\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} > \frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}+1}{\sqrt{k+1}} = \frac{k+1}{\sqrt{k+1}}\\ =\ &\sqrt{k+1}.\end{aligned}$$

Dakle, nejednakost vrijedi i za $n = k+1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da nejednakost vrijedi za svaki prirodan broj.

Primjer 1.1.10 *Dokazati da vrijedi*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}, \quad n \geq 2.$$

Rješenje.
1) Za $n = 2$ nejednakost vrijedi jer je $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12} > \dfrac{1}{2}$.
2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{2k+2} > \frac{1}{2}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{2k+2} = \\ = \ & \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ > \ & \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, nejednakost vrijedi i za $n = k + 1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da nejednakost vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq 2$.

Primjer 1.1.11 *Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geq 5$, vrijedi nejednakost*

$$2^n > n^2.$$

Rješenje.
1) Za $n = 5$ nejednakost vrijedi jer je $2^5 > 5^2$ tj. $32 > 25$.
2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi $2^k > k^2$. 3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2.$$

Dokaz:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

jer je $k^2 > 2k + 1$.
Dakle, nejednakost vrijedi i za $n = k + 1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da nejednakost vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq 5$.
Napomena: Nejednakost $k^2 \geq 2k + 1$ također možemo dokazati koristeći matematičku indukciju.

Primjer 1.1.12 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$17 \mid 5^{n+3} + 11^{3n+1}.$$

Rješenje.
1) Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je

$$5^{1+3} + 11^{3 \cdot 1+1} = 5^4 + 11^4 = 625 + 14641 = 15266 = 17 \cdot 898.$$

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$17 \mid 5^{k+3} + 11^{3k+1}$$

odnosno da vrijedi $5^{k+3} + 11^{3k+1} = 17a$ pri čemu je $a \in \mathbb{Z}$.
3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$17 \mid 5^{(k+1)+3} + 11^{3(k+1)+1}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
5^{(k+1)+3}+11^{3(k+1)+1} &= 5^{k+4}+11^{3k+4}=5^{k+3}\cdot 5+11^{3k+1}\cdot 11^3= \\
&= 5^{k+3}\cdot 5+11^{3k+1}\cdot 1331= \\
&= 5^{k+3}\cdot 5+11^{3k+1}\cdot (1326+5)= \\
&= 5^{k+3}\cdot 5+11^{3k+1}\cdot 5+11^{3k+1}\cdot 1326= \\
&= 5\cdot\left(5^{k+3}+11^{3k+1}\right)+11^{3k+1}\cdot 1326= \\
&= 5\cdot 17a+11^{3k+1}\cdot 17\cdot 78= \\
&= 17\left(5\cdot a+11^{3k+1}\cdot 78\right)=17b,
\end{aligned}$$

pri čemu je $b=5\cdot a+11^{3k+1}\cdot 78$.
Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 1.1.13 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$19 \mid 7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n.$$

Rješenje.
1) Za $n=1$ tvrdnja vrijedi jer je

$$7\cdot 5^{2\cdot 1}+12\cdot 6^1=7\cdot 25+12\cdot 6=175+72=247=19\cdot 13.$$

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. da vrijedi

$$19 \mid 7\cdot 5^{2k}+12\cdot 6^k$$

odnosno da vrijedi $7\cdot 5^{2k}+12\cdot 6^k=19a$ pri čemu je $a\in\mathbb{Z}$.
3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi

$$19 \mid 7\cdot 5^{2(k+1)}+12\cdot 6^{(k+1)}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
7\cdot 5^{2(k+1)}+12\cdot 6^{(k+1)} &= 7\cdot 5^{2k+2}+12\cdot 6^{k+1}=7\cdot 5^{2k}\cdot 25+12\cdot 6^k\cdot 6= \\
&= 7\cdot 5^{2k}\cdot(19+6)+12\cdot 6^k\cdot 6= \\
&= 7\cdot 5^{2k}\cdot 19+7\cdot 5^{2k}\cdot 6+12\cdot 6^k\cdot 6= \\
&= 7\cdot 5^{2k}\cdot 19+6\cdot\left(7\cdot 5^{2k}+12\cdot 6^k\right)= \\
&= 7\cdot 5^{2k}\cdot 19+6\cdot 19a=19\left(7\cdot 5^{2k}+6a\right)=19b,
\end{aligned}$$

pri čemu je $b=7\cdot 5^{2k}+6a$.
Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 1.1.14 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$9 \mid 4^n+15\cdot n-1.$$

Rješenje.
1) Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je

$$4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 = 9 \cdot 2.$$

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$9 \mid 4^k + 15 \cdot k - 1$$

odnosno da vrijedi $4^k + 15 \cdot k - 1 = 9a$ pri čemu je $a \in \mathbb{Z}$.

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$9 \mid 4^{k+1} + 15 \cdot (k + 1) - 1$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15 \cdot (k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 = \\ &= 4 \cdot (4^k + 15k - 1) - 45k + 18 = \\ &= 4 \cdot 9a - 45k + 18 = 4 \cdot 9a - 9(5k - 2) = \\ &= 9(4a - (5k - 2)) = 9(4a - 5k + 2) = 9b, \end{aligned}$$

pri čemu je $b = 4a - 5k + 2$.
Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$.
4) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.

1.2 Binomna formula

Za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definišemo faktorijel broja n sa

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{1.1}$$

pri čemu je $0! = 1$ i $1! = 1$. Proizvod prvih n parnih brojeva označavamo sa $(2n)!!$a proizvod prvih n neparnih brojeva označavamo sa $(2n-1)!!$ pri čemu je $0!! = 1$ i $1!! = 1$.
Izraz oblika $\binom{n}{k}$, $(n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n)$ naziva se *binomni koeficijent* i vrijedi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{1.2}$$

pri čemu je $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
Za binomne koeficijente vrijedi *zakon simetrije* tj.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Za svaki prirodan broj n vrijedi formula za razvoj binoma

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

koja se naziva *Njutnova binomna formula* koju kraće možemo zapisati

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad (0 \leqslant k \leqslant n)\,. \tag{1.3}$$

Opći član razvoja binoma $(a+b)^n$ dat je sa

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad (0 \leqslant k \leqslant n)\,. \tag{1.4}$$

Primjer 1.2.1 *Dokazati* $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$.

Rješenje. Na osnovu formule (1.1) vrijedi $n! = (n-1)! \cdot n$, pa :

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1)}{(n-1)!} = n(n+1).$$

Primjer 1.2.2 *Dokazati jednakost* $(2n)!! = n!2^n, \quad (n = 0, 1, 2, ...)$.

Rješenje. Jednakost dokazujemo koristeći matematičku indukciju:
1) Za $n = 0$ jednakost je očigledna jer je $0!! = 0! = 1$.
2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$ tj. $(2k)!! = k!2^k$.
3) Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi

$$(2(k+1))!! = (k+1)!2^{(k+1)}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} (2(k+1))!! = (2k+2)!! &= (2k)!!(2k+2) = k!2^k(2k+2) \\ &= k!2^k 2(k+1) = (k+1)!2^{(k+1)} \end{aligned}$$

4) Tvrdnja vrijedi za svako $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Primjer 1.2.3 *Izračunati zbir svih binomnih koeficijenata u razvoju binoma* $(a+b)^n$.

Rješenje. Ako u formulu (1.3) uvrstimo $a = b = 1$, dobijamo

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

Primjer 1.2.4 *Dokazati identitet* $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$.

Rješenje Na osnovu definicije binomnog koeficijenta, imamo:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k+1)} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{n-k}{k+1} + 1 \right) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{n+1}{k+1} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Primjer 1.2.5 *Riješiti jednačinu* $\binom{n}{3}+\binom{n}{2}-8\binom{n}{1}=0$ *u skupu prirodnih brojeva.*

Rješenje. Kako je

$$\begin{aligned}\binom{n}{3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\\ \binom{n}{2} &= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=\frac{n(n-1)}{2}\\ \binom{n}{1} &= n\end{aligned}$$

jednačina dobija oblik

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}-8n=0$$

koja je ekvivalentna jednačini

$$n(n-1)(n-2)+3n(n-1)-48n=0$$

odnosno

$$n(n^2-49)=0$$

čija su rješenja $n_1=0, n_2=-7$ i $n_3=7$. Budući da za rješenje tražimo prirodan broj, jedino rješenje jednačine je $n=7$.

Primjer 1.2.6 *Primjenon binomnog obrasca razviti* $(1+2x)^3$.

Rješenje. Na osnovu binomne formule (1.3), imamo:

$$\begin{aligned}(1+2x)^3 &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}1^{3-k}(2x)^k=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(2x)^k\\ &= \binom{3}{0}(2x)^0+\binom{3}{1}(2x)^1+\binom{3}{2}(2x)^2+\binom{3}{3}(2x)^3\\ &= 1+6x+12x^2+8x^3.\end{aligned}$$

Primjer 1.2.7 *Naći trinaesti član u razvoju binoma* $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{15}$.

Rješenje. Budući da tražimo trinaesti član u razvoju binoma, tada je $k=12$, pa iz formule (1.3) dobijamo:

$$\begin{aligned}T_{13} &= \binom{15}{12}\left(\sqrt{2}\right)^{15-12}\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12}=\\ &= \binom{15}{12}\left(\sqrt{2}\right)^{3}\cdot\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{12}=\binom{15}{12}2\sqrt{2}\cdot 3^4=73710\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Primjer 1.2.8 *Odrediti peti član u razvoju binoma* $\left(2x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^8$.

Rješenje. Na osnovu formule (1.4), vrijedi

$$\begin{aligned}T_5 &= \binom{8}{4}\left(2x\sqrt{x}\right)^{8-4}\cdot\left(-\sqrt[3]{x}\right)^4=\\ &= \binom{8}{4}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)^4\cdot\left(-x^{\frac{1}{3}}\right)^4=\binom{8}{4}2^4\cdot x^6\cdot(-1)^4x^{\frac{4}{3}}=\\ &= \binom{8}{4}2^4\cdot x^{6+\frac{4}{3}}=1120x^{\frac{22}{3}}.\end{aligned}$$

Primjer 1.2.9 *Naći srednji član u razvoju binoma* $\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^{16}$.

Rješenje. Razvoj binoma $\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^{16}$ ima 17 članova pa je srednji član deveti član. Na osnovu formule (1.4), vrijedi

$$\begin{aligned} T_9 &= \binom{16}{8}\left(\frac{2}{x}\right)^{16-8}\cdot(-\sqrt{x})^8 = \binom{16}{8}\left(\frac{2}{x}\right)^8\cdot\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)^8 \\ &= \binom{16}{8}2^8\cdot x^{-8}\cdot(-1)^8\cdot x^4 = \binom{16}{8}2^8\cdot x^{-4} = 3294720x^{-4}. \end{aligned}$$

Primjer 1.2.10 *Odrediti koeficijent uz* x^8 *u razvoju binoma* $(x+3)^{12}$.

Rješenje. Opći član razvoja binoma $(x+3)^{12}$ je

$$T_{k+1} = \binom{12}{k}x^{12-k}\cdot 3^k$$

pa je jasno da mora biti $12-k=8$ jer tražimo koeficijent uz x^8, odakle je $k=4$. Traženi koeficijent je

$$\binom{12}{4}\cdot 3^4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 81 = 40095.$$

Primjer 1.2.11 *U razvoju binoma* $\left(\frac{2}{x}+3x\right)^{15}$ *odrediti koeficijent uz* x^7.

Rješenje Opći član razvoja binoma je

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{15}{k}\left(\frac{2}{x}\right)^{15-k}\cdot(3x)^k = \\ &= \binom{15}{k}\left(2x^{-1}\right)^{15-k}\cdot 3^k x^k = \binom{15}{k}2^{15-k}x^{-15+k}\cdot 3^k x^k = \\ &= \binom{15}{k}2^{15-k}\cdot 3^k\cdot x^{-15+2k} \end{aligned}$$

Budući da tražimo koeficijent uz x^7, onda je $-15+2k=7$ odakle je $k=11$, pa je traženi koeficijent uz x^7

$$\binom{15}{k}2^{15-k}\cdot 3^k = \binom{15}{11}2^{15-11}\cdot 3^{11} = \binom{15}{4}2^4\cdot 3^{11}.$$

Primjer 1.2.12 *Naći član koji sadrži* x^7 *u razvoju binoma* $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)^{12}$.

Rješenje. Opći član razvoja binoma je

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{12}{k}\left(-\sqrt[3]{x^2}\right)^{12-k}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^k = \\ &= \binom{12}{k}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{12-k}\cdot\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)^k = \binom{12}{k}x^{\frac{24-2k}{3}}\cdot(-1)^k\cdot x^{\frac{k}{2}} = \\ &= \binom{12}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{\frac{24-2k}{3}+\frac{k}{2}} = \binom{12}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{\frac{48-k}{6}}. \end{aligned}$$

Sada je jasno da je $\frac{48-k}{6}=7$ odakle je $k=6$. Dakle, sedmi član razvoja binoma $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)^{12}$ sadrži x^7.

Primjer 1.2.13 *U razvoju binoma* $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ *naći član koji sadrži* x^3.

Rješenje. Opći član razvoja binoma je

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= \binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{16}{k}\left(\sqrt{x}\right)^{16-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \\
&= \binom{16}{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{16-k}\cdot\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^k = \binom{16}{k}x^{\frac{16-k}{2}}\cdot x^{-\frac{k}{3}} = \\
&= \binom{16}{k}x^{\frac{16-k}{2}-\frac{k}{3}} = \binom{16}{k}x^{\frac{48-5k}{6}}.
\end{aligned}
$$

pa je $\frac{48-5k}{6}=3$ odakle je $k=6$. Dakle, sedmi član razvoja binoma $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ sadrži x^3.

Primjer 1.2.14 *Odrediti onaj član razvoja binoma* $\left(\sqrt[3]{x^2}-x^{-1}\right)^{15}$ *koji ne sadrži* x.

Rješenje. Opći član razvoja binoma je

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= \binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{15}{k}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{15-k}\cdot\left(-x^{-1}\right)^k = \\
&= \binom{15}{k}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{15-k}\cdot(-1)^k\cdot x^{-k} = \binom{15}{k}x^{\frac{30-2k}{3}}\cdot(-1)^k\cdot x^{-k} = \\
&= \binom{15}{k}(-1)^k\cdot x^{\frac{30-2k}{3}-k} = \binom{15}{k}(-1)^k\cdot x^{\frac{30-5k}{3}}.
\end{aligned}
$$

Budući da tražimo član koji ne sadrži x, onda je $\frac{30-5k}{3}=0$ pa je $k=6$. Dakle, sedmi član razvoja binoma $\left(\sqrt[3]{x^2}-x^{-1}\right)^{15}$ ne sadrži x.

Primjer 1.2.15 *Odrediti onaj član razvoja binoma* $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{8}$ *koji ne sadrži* x.

Rješenje. Opći član razvoja binoma je

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= \binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{8}{k}\left(\sqrt{x}\right)^{8-k}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^k = \\
&= \binom{8}{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{8-k}\cdot\left(-3x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = \binom{8}{k}x^{\frac{8-k}{2}}\cdot(-3)^k\cdot x^{-\frac{k}{2}} = \\
&= \binom{8}{k}(-3)^k\cdot x^{\frac{8-k}{2}-\frac{k}{2}} = \binom{8}{k}(-3)^k\cdot x^{\frac{8-2k}{2}} = \binom{8}{k}(-3)^k\cdot x^{4-k}.
\end{aligned}
$$

Budući da tražimo član koji ne sadrži x, onda je $4-k=0$ pa je $k=4$. Dakle, peti član razvoja binoma $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{8}$ ne sadrži x.

Primjer 1.2.16 *Naći trinaesti član u razvoju binoma* $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{n}$ *ako je binomni koeficijent trećeg člana jednak 105.*

Rješenje. Binomni koeficijent trećeg člana je $\binom{n}{2}$ pa iz uslova zadatka imamo $\binom{n}{2} = 105$ što je ekvivalentno jednačini $n^2-n-210=0$. Rješenja posljednje kvadratne jednačine su $n_1=15, n_2=-14$ pa uzimamo samo rješenje n_1 a rješenje $n-2$ odbacujemo jer je negativnan cio broj. Budući da tražimo trinaesti član razvoja binoma, u formulu za opći član razvoja binoma uvrštavamo $k=12$, i tako dobijamo

$$\begin{aligned} T_{13} &= \binom{15}{12}(9x)^{15-12}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12} = \\ &= \binom{15}{12}(9x)^3\cdot\left(-3^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\right)^{12} = \binom{15}{12}9^3x^3\cdot(-1)^{12}\cdot 3^{-6}x^{-6} = \\ &= \binom{15}{3}3^6x^3\cdot 3^{-6}x^{-6} = \binom{15}{3}x^{-3} = 455x^{-3}. \end{aligned}$$

Primjer 1.2.17 *Naći redni broj onog člana razvoja binoma*

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$$

koji sadrži a i b na isti eksponent.

Rješenje. Opći član razvoja binoma je

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{21}{k}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-k}\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{k} = \\ &= \binom{21}{k}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}\cdot\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{k} = \binom{21}{k}a^{\frac{21-k}{3}}\cdot b^{-\frac{21-k}{6}}\cdot b^{\frac{k}{2}}\cdot a^{-\frac{k}{6}} = \\ &= \binom{21}{k}a^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}}\cdot b^{\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6}} = \binom{21}{k}a^{\frac{42-3k}{6}}\cdot b^{\frac{4k-21}{6}}. \end{aligned}$$

Budući da zahtijevamo da a i b budu na isti eksponent, tada mora biti

$$\frac{42-3k}{6}=\frac{4k-21}{6}$$

odakle dobijamo da je $k=9$. Dakle, deseti član razvoja binoma sadrži a i b na isti eksponent.

Primjer 1.2.18 *Naći vrijednost x u izrazu*

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^{6}$$

čiji je četvrti član razvoja binoma jednak 200.

Rješenje. Prvo, odredimo definiciono područje izraza. Jasno je da mora biti $x>0$ i $\log x+1\neq 0$, tj. $x\neq 10^{-1}$ pa je

$$\mathcal{D}=\left(0,10^{-1}\right)\cup\left(10^{-1},+\infty\right).$$

Četvrti član razvoja binoma je

$$\begin{aligned} T_4 &= \binom{6}{3}\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}\right)^{6-3}\cdot\left(\sqrt[12]{x}\right)^3 = \binom{6}{3}\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}\right)^{3}\cdot\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{3} = \\ &= \binom{6}{3}x^{\frac{3}{2(\log x+1)}}\cdot x^{\frac{1}{4}} = \binom{6}{3}x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

pa po uslovu zadatka imamo

$$\binom{6}{3} x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = 200 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = 10.$$

Logaritmiranjem posljednjeg izraza, dobijamo

$$\log x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = \log 10$$

tj.

$$\begin{aligned}
& \log x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = \log 10 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2(\log x+1)} + \frac{1}{4}\right) \log x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{6+\log x+1}{4(\log x+1)} \cdot \log x = 1 \Leftrightarrow \frac{7+\log x}{4(\log x+1)} \cdot \log x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & (7+\log x)\log x = 4(\log x+1) \Leftrightarrow 7\log x + \log^2 x = 4\log x + 4 \\
\Leftrightarrow\ & \log^2 x + 3\log x - 4 = 0.
\end{aligned}$$

Uvodeći smjenu $\log x = t$, dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2 + 3t - 4 = 0$ čija su rješenja $t_1 = -4$ i $t_2 = 1$. Za $t = -4$ dobijamo rješenje $x = 0,001 \in \mathcal{D}$, a za $t = 1$ dobijamo rješenje $x = 10 \in \mathcal{D}$.

Primjer 1.2.19 *Izračunati član razvoja binoma*

$$\left(4\sqrt[5]{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^n$$

koji sadrži $x^2\sqrt[5]{x^4}$ *ako je zbir prva tri binomna koeficijenta jednak* 56.

Rješenje. Iz uslova zadatka imamo $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2} = 56$ što je ekvivalentno jednačini $n^2+n-110 = 0$. Rješenja posljednje kvadratne jednačine su $n_1 = 10$ i $n_2 = -11$ od kojih u obzir dolazi samo prvo rješenje jer je drugo negativno. Opći član razvoja binoma je

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{10}{k} \left(4\sqrt[5]{x}\right)^{10-k} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^k = \\
&= \binom{10}{k} 4^{10-k} \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10-k} \cdot \left(2^{-1} x^{\frac{1}{3}}\right)^k = \\
&= \binom{10}{k} 4^{10-k} x^{\frac{10-k}{5}} \cdot 2^{-k} x^{\frac{k}{3}} = \binom{10}{k} 4^{10-k} \cdot 2^{-k} \cdot x^{\frac{10-k}{5}+\frac{k}{3}} = \\
&= \binom{10}{k} 4^{10-k} \cdot 2^{-k} \cdot x^{\frac{30+2k}{15}}.
\end{aligned}$$

Kako je $x^2\sqrt[5]{x^4} = x^2 x^{\frac{4}{5}} = x^{2+\frac{4}{5}} = x^{\frac{14}{5}}$, onda je jasno da mora biti $\dfrac{30+2k}{15} = \dfrac{14}{5}$ odakle je $k = 6$. Dakle, sedmi član razvoja binoma ima traženu osobinu.

Primjer 1.2.20 *Naći za koju vrijednost* x *u razvoju binoma*

$$\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$$

zbir trećeg i petog člana iznosi 135, *ako je zbir binomnih koeficijenata tri posljednja člana jednak* 22.

Rješenje. Binomni koeficijenti tri posljednja člana jednaki su binomnim koeficijentima prva tri člana. Po uslovu zadatka imamo

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=22$$

što je ekvivalentno kvadratnoj jednačini $n^2+n-42=0$ čija su rješenja $n_1=6$ i $n_2=-7$ od kojih u obzir dolazi samo prvo rješenje jer je drugo negativno. Treći član ($k=2$) razvoja binoma je

$$\begin{aligned}
T_3 &= \binom{6}{2}\left(\sqrt{2^x}\right)^{6-2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^2=\\
&= \binom{6}{2}\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^4\cdot\left(2^{-\frac{x-1}{2}}\right)^2=\binom{6}{2}2^{2x}\cdot 2^{1-x}=\\
&= \binom{6}{2}2^{1+x}
\end{aligned}$$

a peti član ($k=4$) razvoja binoma je

$$\begin{aligned}
T_5 &= \binom{6}{4}\left(\sqrt{2^x}\right)^{6-4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^4=\\
&= \binom{6}{4}\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(2^{-\frac{x-1}{2}}\right)^4=\binom{6}{4}2^{x}\cdot 2^{2-2x}=\\
&= \binom{6}{4}2^{2-x}.
\end{aligned}$$

Sada je, po uslovu zadatka,

$$\begin{aligned}
\binom{6}{2}2^{1+x}+\binom{6}{4}2^{2-x} &= 135\\
15\cdot 2^{1+x}+15\cdot 2^{2-x} &= 135\\
2^{1+x}+2^{2-x} &= 9\\
2\cdot 2^x+\frac{4}{2^x} &= 9\\
2\cdot\left(2^x\right)^2-9\cdot 2^x-4 &= 0.
\end{aligned}$$

Uvedimo smjenu $t=2^x$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$2t^2-9t-4=0$$

čija su rješenja $t_1=\frac{1}{2}$ i $t_2=4$. Za $t=\frac{1}{2}$ dobijamo $x=-1$, a za $t=4$ dobijamo $x=2$.

Primjer 1.2.21 *Odrediti za koju vrijednost x četvrti član razvoja binoma*

$$\left(\sqrt{2^{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^n$$

je dvadeset pet puta veći od eksponenta binoma ako je binomni koeficijent četvrtog člana pet puta veći od binomnog koeficijenta drugog člana.

Rješenje. Prema uslovu zadatka imamo $\binom{n}{3}=5\binom{n}{1}$ što je ekvivalentno jednačini $n^2-3n-28=0$. Rješenja posljednje kvadratne jednačine su $n_1=7$ i $n_2=-4$ pa u obzir dolazi samo prvo rješenje a drugo odbacujemo jer je negativno. Četvrti član ($k=3$) razvoja ovog binoma je

$$\begin{aligned}
T_4 &= \binom{7}{3}\left(\sqrt{2^{x-1}}\right)^{7-3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^3=\binom{7}{3}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3=\\
&= 35\cdot 2^{2x-2}\cdot 2^{-x}=35\cdot 2^{x-2}
\end{aligned}$$

Prema uslovu zadatka imamo $35\cdot 2^{x-2}=140$, tj. $2^{x-2}=4$ odakle je $x=4$.

Primjer 1.2.22 *Odnos koefcijenata petog i trećeg člana u razvoju binoma*

$$\left(x\sqrt{x^{-1}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x^2\sqrt{x}}}\right)^n$$

je 14:3. Odrediti sedmi član razvoja.

Rješenje. Opći član razvoja binoma je

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{k} \left(x\sqrt{x^{-1}}\right)^{n-k} \left(-\sqrt[5]{\frac{1}{x^2\sqrt{x}}}\right)^k = \\
&= \binom{n}{k} \left(xx^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-k} \left(-\sqrt[5]{\frac{1}{x^2 x^{\frac{1}{2}}}}\right)^k = \binom{n}{k} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{n-k} \left(-\sqrt[5]{\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}}\right)^k = \\
&= \binom{n}{k} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{n-k} \left(-\sqrt[5]{x^{-\frac{5}{2}}}\right)^k = \binom{n}{k} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{n-k} \left(-\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^k = \\
&= \binom{n}{k} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{n-k} \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = \binom{n}{k} x^{\frac{n-k}{2}} (-1)^k x^{-\frac{k}{2}} = \\
&= \binom{n}{k} (-1)^k x^{\frac{n-k}{2} - \frac{k}{2}} = \binom{n}{k} (-1)^k x^{\frac{n-2k}{2}}.
\end{aligned}$$

Koeficijent trećeg člana ($k = 2$) je $\binom{n}{k}(-1)^k = \binom{n}{2}(-1)^2 = \binom{n}{2}$. Koeficijent petog člana ($k = 4$) je $\binom{n}{k}(-1)^k = \binom{n}{4}(-1)^4 = \binom{n}{4}$. Po uslovu zadatka imamo $\binom{n}{4} : \binom{n}{2} = 14 : 3$ što je ekvivalentno jednačini $n^2 - 5n - 50 = 0$. Rješenja posljednje kvadratne jednačine su $n_1 = -5$ i $n_2 = 10$. U obzir dolazi samo pozitivno rješenje pa binom sada izgleda

$$\left(x\sqrt{x^{-1}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x^2\sqrt{x}}}\right)^{10}.$$

Na osnovu pokazanog, opći član razvoja ovog binoma je

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} (-1)^k x^{\frac{n-2k}{2}}$$

pa ako u ovu formulu uvrstimo da je $n = 10$ i $k = 6$, dobićemo da je sedmi član razvoja ovog binoma $T_7 = \binom{10}{6} (-1)^6 x^{\frac{10-12}{2}} = \binom{10}{6} x^{-1}$.

Primjer 1.2.23 *Koliko racionalnih članova sadrži razvoj binoma*

$$(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}?$$

Rješenje. Opšti član razvoja binoma je

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{100}{k} (\sqrt{1})^{100-k} (\sqrt[4]{3})^k \\
&= \binom{100}{k} 2^{\frac{100-k}{2}} 3^{\frac{k}{4}} = \binom{100}{k} 2^{50} 2^{-\frac{k}{2}} 3^{\frac{k}{4}}.
\end{aligned}$$

Da bi članovi razvoja ovog binoma bili racionalni brojevi, potrebno je i dovoljno da k bude djeljivo sa 4. Budući da je $0 \leqslant k \leqslant 100$, zaključujemo da su to brojevi $0, 4, 8, 12, ..., 100$ a njih ukupno ima 26.

1.3 Racionalne nejednačine

Primjer 1.3.1 *Riješiti nejednačinu*

$$\frac{1}{x-1} < 1.$$

Rješenje. Vrijedi niz ekvivalencija:

$$\frac{1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x-1} < 0.$$

Iz tabele[1]

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2-x}{x-1}$		$-$	$*$	$+$	0	$-$	

zaključujemo da je rješenje nejednačine $R = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Primjer 1.3.2 *Riješiti nejednačinu*

$$\frac{2x+1}{1-3x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Rješenje. Vrijedi niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{1-3x} \geqslant \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{1-3x} - \frac{1}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2(2x+1)-1+3x}{2(1-3x)} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4x+2-1+3x}{2(1-3x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{7x+1}{2(1-3x)} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Iz tabele

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$7x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2(1-3x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{7x+1}{2(1-3x)}$		$-$	0	$+$	$*$	$-$	

zaključujemo da je rješenje nejednačine $R = \left[-\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$.

Primjer 1.3.3 *Riješiti nejednačinu*

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x-1}.$$

Rješenje. Vrijedi niz ekvivalencija:

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-x}{x(x-1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x(x-1)} \leqslant 0.$$

[1] Znak $*$ označava za koju vrijednost promjenljive x nejednačina nije definisana!

Iz tabele

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-1}{x(x-1)}$		$-$	$*$	$+$	$*$	$-$	

zaključujemo da je rješenje nejednačine $R = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Primjer 1.3.4 *Riješiti nejednačinu*

$$\frac{x^2 - 6x - 1}{2x + 1} \leqslant -2.$$

Rješenje. Vrijedi niz ekvivalencija:

$$\frac{x^2 - 6x - 1}{2x + 1} \leqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 6x - 1}{2x + 1} + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{2x + 1} \leqslant 0.$$

Iz tabele

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-2x-3}{2x-1}$		$-$	0	$+$	$*$	$-$	0	$+$	

zaključujemo da je rješenje nejednačine $R = (-\infty, -1] \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right]$.

Primjer 1.3.5 *Riješiti nejednačinu*

$$\frac{x^2 + 4x + 6}{x^2 + x - 6} \leqslant 1.$$

Rješenje. Vrijedi niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + 4x + 6}{x^2 + x - 6} \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + 4x + 6}{x^2 + x - 6} - 1 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + 4x + 6 - x^2 - x + 6}{x^2 + x - 6} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{3x + 12}{x^2 + x - 6} \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Iz tabele

x	$-\infty$		-4		-3		2		$+\infty$
$3x+12$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2+x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{3x+12}{x^2+x-6}$		$-$	0	$+$	$*$	$-$	$*$	$+$	

zaključujemo da je rješenje nejednačine $R = (-\infty, -4] \cup (-3, 2)$.

1.4 Jednačine sa apsolutnim vrijednostima

Primjer 1.4.1 *Riješiti jednačinu*

$$|2x-1|-2|1-x|=1.$$

Rješenje. Znak funkcija koje su pod znakom apsolutne vrijednosti predstavimo tabelarno

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0 $+$	$+$	
$1-x$	$+$	$+$	0 $-$	

1. Za $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ imamo niz ekvivalencija

$$|2x-1|-2|1-x|=1 \quad \Leftrightarrow \quad -(2x-1)-2(1-x)=1 \Leftrightarrow -1=1$$

pa jednačina na ovom skupu nema rješenja.
2. Za $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |2x-1|-2|1-x|=1 \quad &\Leftrightarrow \quad (2x-1)-2(1-x)=1 \Leftrightarrow 4x-3=1 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x=4 \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

Budući da $1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, onda je rješenje jednačine $x=1$.
3. Za $x \in (1,+\infty)$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |2x-1|-2|1-x|=1 \quad &\Leftrightarrow \quad (2x-1)-2(-(1-x))=1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x-1+2-2x=1 \Leftrightarrow 1=1 \end{aligned}$$

pa je rješenje jednačine skup $(1,+\infty)$.
Dakle, rješenje jednačine je skup $x \in [1,+\infty)$.

Primjer 1.4.2 *Riješiti jednačinu*

$$2|2x+1|-x=|x+3|.$$

Rješenje. Znak funkcija koje su pod znakom apsolutne vrijednosti predstavimo tabelarno

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	$-$ 0	$+$	
$x+3$	$-$ 0	$+$	$+$	

1. Za $x \in (-\infty, -3]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} 2|2x+1|-x=|x+3| \quad &\Leftrightarrow \quad 2(-(2x+1))-x=-(x+3) \\ &\Leftrightarrow \quad -4x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

pa jednačina na ovom skupu nema rješenja jer $\frac{1}{4} \notin (-\infty, -3]$.

2. Za $x \in \left(-3, -\frac{1}{2}\right]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} 2|2x+1| - x = |x+3| \quad &\Leftrightarrow \quad 2(-(2x+1)) - x = x+3 \\ &\Leftrightarrow \quad -4x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

pa jednačina na ovom skupu nema rješenja jer $-\frac{1}{4} \notin \left(-3, -\frac{1}{2}\right]$.

3. Za $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} 2|2x+1| - x = |x+3| \quad &\Leftrightarrow \quad 2(2x+1) - x = x+3 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

pa je rješenje jednačine $x = \frac{1}{2}$ jer $\frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Dakle, rješenje jednačine je $x = \frac{1}{2}$.

Primjer 1.4.3 *Riješiti jednačinu*

$$|x-3| + |1-4x| = 2|x+2|.$$

Rješenje. Znak funkcija koje su pod znakom apsolutne vrijednosti predstavimo tabelarno

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{4}$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$	$-$ 0 $+$	
$1-4x$	$+$		$+$ 0 $-$	$-$	
$x+2$	$-$ 0 $+$		$+$	$+$	

1. Za $x \in (-\infty, -2]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x-3| + |1-4x| = 2|x+2| \quad &\Leftrightarrow \quad -(x-3) + (1-4x) = 2(-(x+2)) \\ &\Leftrightarrow \quad -3x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

pa jednačina na ovom skupu nema rješenje jer $\frac{8}{3} \notin (-\infty, -2]$.

2. Za $x \in \left(-2, \frac{1}{4}\right]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x-3| + |1-4x| = 2|x+2| \quad &\Leftrightarrow \quad -(x-3) + (1-4x) = 2(x+2) \\ &\Leftrightarrow \quad -7x = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

pa jednačina na ovom skupu ima rješenje $x = 0$ jer $0 \in \left(-2, \frac{1}{4}\right]$.

3. Za $x \in \left(\frac{1}{4}, 3\right]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x-3| + |1-4x| = 2|x+2| \quad &\Leftrightarrow \quad -(x-3) - (1-4x) = 2(x+2) \\ &\Leftrightarrow \quad 3x+2 = 2x+4 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

pa jednačina na ovom skupu ima rješenje $x = 2$ jer $2 \in \left(\frac{1}{4}, 3\right]$.
4. Za $x \in (3, +\infty)$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x-3| + |1-4x| = 2|x+2| \ &\Leftrightarrow\ (x-3) - (1-4x) = 2(x+2) \\ &\Leftrightarrow\ 3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

pa jednačina na ovom skupu nema rješenje jer $\frac{8}{3} \notin (3, +\infty)$.

Primjer 1.4.4 *Riješiti jednačinu*

$$|x-1| + |x^2 + 3x - 4| = 5.$$

Rješenje. Znak funkcija koje su pod znakom apsolutne vrijednosti predstavimo tabelarno

x	$-\infty \quad -4 \quad 1 \quad +\infty$
$x-1$	$- \quad \vert \quad - \ 0 \ +$
x^2+3x-4	$+ \ 0 \ - \ 0 \ -$

1. Za $x \in (-\infty, -4]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x-1| + |x^2+3x-4| = 5 \ &\Leftrightarrow\ -(x-1) + (x^2+3x-4) = 5 \\ &\Leftrightarrow\ x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4 \vee x_2 = 2. \end{aligned}$$

pa jednačina na ovom skupu ima jedno rješenje $x = -4$ jer $x_2 = 2 \notin (-\infty, -4]$.
2. Za $x \in (-4, 1]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x-1| + |x^2+3x-4| = 5 \ &\Leftrightarrow\ -(x-1) - (x^2+3x-4) = 5 \\ &\Leftrightarrow\ -x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4 \vee x_2 = 0. \end{aligned}$$

pa jednačina na ovom skupu ima jedno rješenje $x = 0$ jer $x_1 = -4 \notin (-4, 1]$.
3. Za $x \in (1, +\infty)$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x-1| + |x^2+3x-4| = 5 \ &\Leftrightarrow\ (x-1) + (x^2+3x-4) = 5 \\ &\Leftrightarrow\ x^2 + 4x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ x_1 = -2 - \sqrt{14} \vee x_2 = -2 + \sqrt{14}. \end{aligned}$$

pa jednačina na ovom skupu ima jedno rješenje $x = -2 + \sqrt{14}$ jer $x_1 = -2 - \sqrt{14} \notin (1, +\infty)$.
Dakle, rješenja jednačine su $x = -4$, $x = 0$ i $x = -2 + \sqrt{14}$.

1.5 Nejednačine sa apsolutnim vrijednostima

Primjer 1.5.1 *Riješiti nejednačinu*

$$|x+1| + |3x-1| > 2.$$

Rješenje. Znak funkcije koje su pod znakom apsolutne vrijednosti predstavimo tabelarno

x	$-\infty \quad -1 \quad \frac{1}{3} \quad +\infty$
$x+1$	$- \ 0 \ + \quad \vert \quad +$
$3x-1$	$- \quad \vert \quad - \ 0 \ +$

1. Za $x \in (-\infty, -1]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x+1| + |3x-1| > 2 \;&\Leftrightarrow\; -(x+1) - (3x-1) > 2 \\ &\Leftrightarrow\; x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_1 = (-\infty, -1] \cap \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) = (-\infty, -1] .$$

2. Za $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x+1| + |3x-1| > 2 \;&\Leftrightarrow\; (x+1) - (3x-1) > 2 \Leftrightarrow -2x > 0 \\ &\Leftrightarrow\; x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) . \end{aligned}$$

Rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_2 = \left(-1, \frac{1}{3}\right] \cap (-\infty, 0) = (-1, 0) .$$

3. Za $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x+1| + |3x-1| > 2 \;&\Leftrightarrow\; (x+1) + (3x-1) > 2 \Leftrightarrow 4x > 2 \\ &\Leftrightarrow\; x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_3 = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \cap \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Konačno rješenje nejednačine je skup

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Primjer 1.5.2 *Riješiti nejednačinu*

$$|x^2 + 2x - 3| < 3x + 3.$$

Rješenje. Znak funkcije koje su pod znakom apsolutne vrijednosti predstavimo tabelarno

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad 1 \quad$ $+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	$+ \;\; 0 \;\; - \;\; 0 \;\; +$

1. Za $x \in (-\infty, -3]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x^2 + 2x - 3| < 3x + 3 \;&\Leftrightarrow\; (x^2 + 2x - 3) < 3x + 3 \\ &\Leftrightarrow\; x^2 + x - 6 < 0. \end{aligned}$$

Rješenje kvadratne nejednačine $x^2+x-6<0$ je $x\in(-3,2)$, pa je rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_1=(-\infty,-3]\cap(-3,2)=\emptyset.$$

2. Za $x\in(-3,1]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}|x^2+2x-3|<3x+3 &\Leftrightarrow -(x^2+2x-3)<3x+3\\ &\Leftrightarrow -x^2-5x<0.\end{aligned}$$

Rješenje kvadratne nejednačine $-x^2-5x<0<0$ je $x\in(-\infty,-5)\cup(0+\infty)$, pa je rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_2=((-\infty,-5)\cup(0+,\infty))\cap(-3,1)=(0,1].$$

3. Za $x\in(1,+\infty)$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}|x^2+2x-3|<3x+3 &\Leftrightarrow (x^2+2x-3)<3x+3\\ &\Leftrightarrow x^2+x-6<0.\end{aligned}$$

Rješenje kvadratne nejednačine $x^2+x-6<0$ je $x\in(-3,2)$, pa je rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_3=(1,+\infty)\cap(-3,2)=(1,2).$$

Konačno rješenje nejednačine je skup

$$R=R_1\cup R_2\cup R_3=(0,2).$$

Primjer 1.5.3 *Riješiti nejednačinu*

$$|x^2-4x|+3\geqslant x^2+|x-5|.$$

Rješenje. Znak funkcije koje su pod znakom apsolutne vrijednosti predstavimo tabelarno

x	$-\infty$		0		4		5		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	

1. Za $x\in(-\infty,0]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}|x^2-4x|+3\geqslant x^2+|x-5| &\Leftrightarrow (x^2-4x)+3\geqslant x^2-(x-5)\\ &\Leftrightarrow -3x\geqslant 2\Leftrightarrow x\leqslant-\frac{2}{3}\\ &\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right].\end{aligned}$$

Rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_1=(-\infty,0]\cap\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]=\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right].$$

2. Za $x\in(0,4]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}|x^2-4x|+3\geqslant x^2+|x-5| &\Leftrightarrow -(x^2-4x)+3\geqslant x^2-(x-5)\\ &\Leftrightarrow -2x^2+5x-2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Rješenje kvadratne nejednačine $-2x^2 + 5x - 2 \geqslant 0$ je skup $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ pa je rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_2 = (0, 4] \cap \left[\frac{1}{2}, 2\right] = \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

3. Za $x \in (4, 5]$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x^2 - 4x| + 3 \geqslant x^2 + |x - 5| &\Leftrightarrow (x^2 - 4x) + 3 \geqslant x^2 - (x - 5) \\ &\Leftrightarrow -3x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]. \end{aligned}$$

Rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_3 = (4, 5] \cap \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] = \emptyset.$$

4. Za $x \in (5, +\infty)$ imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} |x^2 - 4x| + 3 \geqslant x^2 + |x - 5| &\Leftrightarrow (x^2 - 4x) + 3 \geqslant x^2 + (x - 5) \\ &\Leftrightarrow -5x \geqslant -8 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{8}{5} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{8}{5}\right]. \end{aligned}$$

Rješenje nejednačine u ovoj slučaju

$$R_3 = (5, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{8}{5}\right] = \emptyset.$$

Konačno rješenje nejednačine je skup

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

Primjer 1.5.4 *Riješiti nejednačinu*

$$\left|\frac{2x - 1}{x + 1}\right| \leqslant 2.$$

Rješenje. Vrijedi niz ekvivalencija[2]

$$\begin{aligned} \left|\frac{2x - 1}{x + 1}\right| \leqslant 2 &\Leftrightarrow -2 \leqslant \frac{2x - 1}{x + 1} \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x + 1} \geqslant -2 \wedge \frac{2x - 1}{x + 1} \leqslant 2. \end{aligned}$$

Riješimo racionalnu nejednačinu $\frac{2x - 1}{x + 1} \geqslant -2$. Uočimo niz ekvivalencija

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \geqslant -2 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x + 1} + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4x + 3}{x + 1} \geqslant 0.$$

[2] Vrijedi $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

Iz tabele

x	$-\infty$		-1		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4x+3}{x+1}$		$+$	$*$	$-$	0	$+$	

zaključujemo da je rješenje nejednačine

$$R_1 = (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right).$$

Riješimo racionalnu nejednačinu $\dfrac{2x-1}{x+1} \leqslant 2$. Uočimo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+1} \leqslant 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x+1} - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x+1} \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty).\end{aligned}$$

Dakle, rješenje nejednačine $\dfrac{2x-1}{x+1} \leqslant 2$ je skup $R_2 = (-1, +\infty)$. Rješenje početne nejednačine je skup

$$R = R_1 \cap R_2 = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right).$$