Geometrija II

Elvis Baraković[1]

13. studenoga 2018.

[1]Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika, Univerzitetska 4 75000 Tuzla;http://pmf.untz.ba/staff/elvis.barakovic/

Sažetak

Ova skripta je namijenjena studentima druge godine Odsjeka matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Tuzli. Ona je grubi draft priprema predavanja te sigurno sadrži greške matematičkog kao i gramatičkog tipa. Molim Vas da mi ukažete na njih. Svakako, dodatna literatura je puno bitnija i opširnija za učenje i pripremu ispita. Preporučujem da se koriste i drugi udžbenici u kojima se može naći sadržaj obrađen na ovom kursu, te ukoliko smatrate da je tu bolje obrađena neka oblast, da mi ukažete na to. Izlaganje u ovoj skripti uglavnom prati sadržaj u udžbeniku Osnovi geometrije od M. Prvanović kao i predavanja profesora V. Petrovića koja je držao na Odsjeku matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli prethodnih godina.

Sadržaj

Poglavlje 1

Aksiom paralelnosti

Uočimo pravu a i tačku $A \notin a$. Tada postoji prava b takva da je

$$A \in b \wedge a \cap b = \emptyset. \tag{1.1}$$

Egzistencija koplanarnih pravih čiji je presjek prazan skup je posljedica prve tri grupe aksioma.

Možemo sebi postaviti pitanje koliko pravih b zadovoljava uslov (1.1). Odgovor na ovo pitanje ćemo dobiti uvođenjem novog aksioma, tzv. *aksioma paralenosti* koji glasi:

V_E (Playfairov postulat)[1]: *Za svaku pravu a i svaku tačku $A \notin a$ postoji samo jedna prava koja sadrži tačku A a ne siječe pravu a.*

Ovaj aksiom predstavlja peti i zadnji aksiom Hilbertovog sistema aksioma. Skup svih posljedica sistema $(I)-(V_E)$ naziva se *Euklidska geometrija*. Ravan čije tačke i prave zadovoljavaju sve aksiome Hilberovog sistema naziva se *euklidska ravan* a prostor čije tačke, prave i ravni zadovoljavaju sve zahtjeve Hilbertovog sistema aksioma naziva se *euklidski prostor*.

Definicija 1.1

Neka su prave a i b koplanarne. Za pravu a kažemo da je paralelna pravoj b, i pišemo $a \| b$, ako je $a \cap b = \emptyset$ ili $a \equiv b$.

Teorema 1.2

[1] John Playfair (1748.-1819.), škotski matematičar

U skupu svih pravih jedne ravni, relacija "… *je paralelna* …" je relacija ekvivalencije.

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost relacije slijedi direktno iz Definicije 1.1. Dokažimo tranzitivnot relacije. Neka je $a \| c$ i $b \| c$. Pretpostavimo suprotno, tj. da nije $a \parallel b$. Tada je $a \cap b = \{P\}$. Dalje zaključujemo da postoje dvije prave koje su paralelne sa pravom c a koje sadrže tačku P. To je u suprotnosti sa aksiomom V_E. Dakle, $a \parallel b$. Relacija je refleksivna, simetična i tranzitivna pa je to relacija ekvivalencije. □

Lema 1.3

Ako prava siječe jednu od dvije paralelne prave tada siječe i drugu pravu.

Dokaz. Neka su prave a i b paralelne i neka prava p siječe pravu a u tački P. Pretpostavimo da prava p ne siječe pravu b, tj. da su prave p i b paralelne. To bi značilo da kroz tačku P prolaze dvije prave a i p koje su paralelne sa pravom b, što je u suprotnosti sa aksiomom V_E. □

Lema 1.4

Ako je prava ortogonalna na jednu od dvije paralelne prave tada je ortogonalna i na drugu pravu.

Teorema 1.5

Neka su u prostoru date tri prave od kojih su svake dvije koplanarne. Tada vrijedi:

(a) ako se dvije prave sijeku tada i treća prava sadrži tačku presjeka;

(b) ako su dvije prave paralelne tada je i treća prava paralelna sa svakom od njih.

Dokaz. Označimo prave sa a, b, c. Neka su ravni α, β, γ ravni takve da vrijedi

$$b, c \in \alpha, \ \ a, c \in \beta, \ \ a, b \in \gamma.$$

(a) Pretpostavimo da se sijeku prave a i b i neka je $a \cap b = \{P\}$. Tada je tačka P sadržana i u ravni α i u ravni β. Dakle, $P \in \alpha \cap \beta = \{c\}$.

(b) Pretpostavimo da je $a \| b$. Pretpostvimo suprotno, tj. da je $a \cap c = \{P\}$. Budući da se dvije prave sijeku u tački P prema prethodno pokazanom tu tačku sadrži i treća prava b, što je protivrječno sa činjenicom da je $a \| b$. Dakle, $a \cap c = \emptyset$. Slično pokazujemo da je $b \cap c = \emptyset$.

$\square$

Teorema 1.6

U skupu svih pravih u prostoru, relacija "... *je paralelna* ..." je relacija ekvivalencije.

Dokaz. Na osnovu definicije relacije "... je paralelna ..." zaključujemo njenu osobinu refleksivnosti i simetričnosti. Pokažimo tranzitvnost relacije. Ukoliko su prave a, b, c koplanarne, tranzitivnost relacije pokazana je u dokazu Teoreme 1.2. Ako prave a, b, c nisu koplanarne tranzitivnost relacije pokazana je u dokazu Teoreme 1.5 u stavu (b). $\square$

Budući da smo pokazali da je u skupu svih pravih jedne ravni i skupu svih pravih u prostoru relacija "... *je paralelna* ..." je relacija ekvivalencije, to ona određuje particiju na klase ekvivalencije. Svaka takva klasa se naziva *pravac* i pravac određen pravom p ćemo označavati sa (p).

Definicija 1.7

Projekcija tačke A na ravan α u pravcu (p) je tačka presjeka ravni α i onog dijela pravca (p) koji sadrži tačku A.

U euklidskoj geometriji normale iste ravni su međusobno paralelne pa je normalna projekcija specijalan slučaj paralelne projekcije.

U prethodnom izlaganju smo razmatrali paralelnost dvije prave u ravni i prostoru. Dalje razmatramo paralelnost prave i ravni.

Definicija 1.8

Prava a je paralelna sa ravni α, i pišemo $a \| \alpha$, ako je paralelna sa svojom ortogonalnom projekcijom na ravan α.

Posljedično vrijedi da prava koja je paralelna sa ravni, paralelna je sa beskonačno mnogo pravih te iste ravni.

Također, ako $P \notin a$ tada postoji beskonačno mnogo ravni koje sadrže tačku P a koje su paralelne sa pravom a. Sve te ravni sadrže pravu koja je paralelna sa pravom a.

Teorema 1.9

Ako jedna od dvije paralelne prave siječe neku ravan, tada tu ravan siječe i druga prava.

Dokaz. Neka je $a \| b$. Tada postoji ravan α koja sadrži obje prave a i b. Neka je β proizvoljna ravan i neka je $a \cap \beta = \{A\}$. Pokažimo da i prava b siječe pravu β. Jasno je da postoji prava p koja je presjek ravni α i β. Pretpostavimo da prava b ne siječe ravan β. Tada prava b ne siječe ni pravu p. Dakle, u ravni α postoje dvije prave, a to su a i p koje sadrže tačku A a paralelne su sa pravom b. To je protivrječno sa V_E. $\square$

Posljedično ovom stavu vrijedi da ako je jedna od dvije paralelne prave normalna na neku ravan, tada je i druga prava normalna na tu ravan.

Definicija 1.10

Ravan α je paralelna sa ravni β, što zapisujemo kao $\alpha \| \beta$, ako je $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ili $\alpha \equiv \beta$.

Teorema 1.11

Za svaku ravan α i svaku tačku $A \notin \alpha$ postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži tačku A a koja je paralelna sa ravni α.

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dvije ravni β_1 i β_2 koje sadrže tačku A a paralelne su sa ravni α. Tada postoji prava b takva da je $\beta_1 \cap \beta_2 = \{b\}$. Neka je $A' = \omega_\alpha(A)$ i neka je δ proizvoljna ravan koja sadrži pravu $p(A', A)$. Tada je $\delta \perp \alpha$. Neka je $\{a'\} = \delta \cap \alpha$, $\{a_1\} = \delta \cap \beta_1$ i $\{a_2\} = \delta \cap \beta_2$. Tada je $a_1 \neq a_2$ i prava a' je ortogonalna projekcija pravih a_1 i a_2 na ravan α. S druge strane, kako je $\beta_1 \cap \alpha = \emptyset$, tada je $a_1 \cap a' = \emptyset$. Na isti način dokazujemo da je $a_2 \cap a' = \emptyset$. To znači da u ravni δ postoje dvije prave a_1 i a_2 koje sadrže tačku A a paralelne su sa a što je u suprotnosti sa V_E. $\square$

Direktna posljedica ove teoreme jeste činjenica da je u skupu svih ravni relacija "... *je paralelna* ..." tranzitivna. Osobine refleksivnosti i simetričnosti su sadržane u Definiciji 1.10. Time je dokazana

Teorema 1.12

U skupu svih ravni relacija "... *je paralelna* ..." je relacija ekvivalencije.

Teoremom 1.11 je pokazana jednoznačnost ravni koja sadrži datu tačku a paralelna je sa datom ravni. Egzistenciju takve ravni tvrdi sljedeća

Teorema 1.13

Ako $A \notin \alpha$ tada sve prave koje sadrže tačku A a paralelne su sa ravni α su koplanarne. Ta ravan je paralelna sa ravni α.

Dokaz. Neka su a i b dvije prave koje sadrže tačku A a paralelne su sa ravni α. Prave a i b određuju neku ravan koju ćemo označiti sa α'. Pretpostavimo da postoji prava p takva da je $\alpha \cap \alpha' = \{p\}$. Budući da prava a ne siječe ravan α onda ne siječe ni pravu p. isto to vrijedi i za pravu b. Dakle, u ravni α' postoje dvije prave a i b koje sadrže tačku A a koje su paralelne sa pravom p što je u suprotnosti sa V_E, pa je $\alpha' \| \alpha$.

Označimo sa c treću pravu koja sadrži tačku A a koja je paralelna sa ravni α. Prema prethodno pokazanom, prave a i c određuju ravan α'' takvu da je $\alpha'' \| \alpha$. Ali na osnovu Teoreme 1.11 vrijei $\alpha' \equiv \alpha''$, tojest ravan α' sadrži prave a, b i c. □

Definicija 1.14

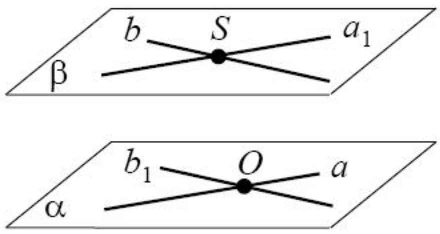
Za dvije prave kažemo da su mimoilazne ako nisu sadržane u istoj ravni.

Ako su prave a i b mimoilazne prave, to ćemo označavati sa $a)(b$.

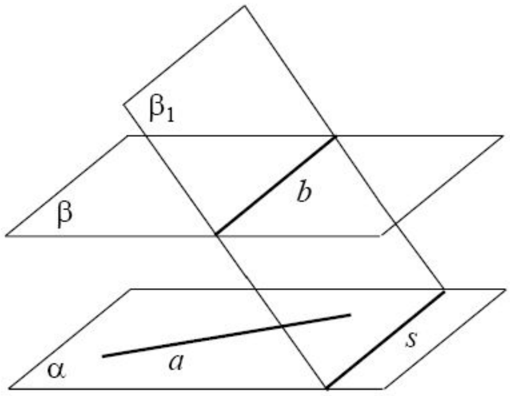
Teorema 1.15

Za svake dvije mimoilazne prave a i b postoji jedinstveni par međusobno paralelnih ravni α i β , takav da je $a \in \alpha$ i $b \in \beta$.

Dokaz. Prvo pokžaimo da takav par ravni postoji. Zaista, neko su a i b dvije mimoilazne prave te $O \in a$, $S \in b$. Odaberimo pravu a_1 takvu da je $a_1 \| a$ i $S \in a_1$ i odaberimo pravu b_1 takvu da je $b_1 \| b$ i $O \in b_1$. Neka je α ravan određena sa pravima a i b_1 i neka je β ravan određena sa pravima b i a_1. Tada su ravni α i β paralelne ravni na osnovu Teoreme 1.13.



Pokažimo sada jedinstvenost tog para ravni. Pretpostavimo da postoje ravni α_1 koja sadrži pravu a i β_1 koja sadrži pravu b takve da je $\alpha_1 \| \beta_1$, $\alpha_1 \neq \alpha$ i $\beta_1 \neq \beta$. Neka je $\alpha \cap \beta_1 = \{s\}$.

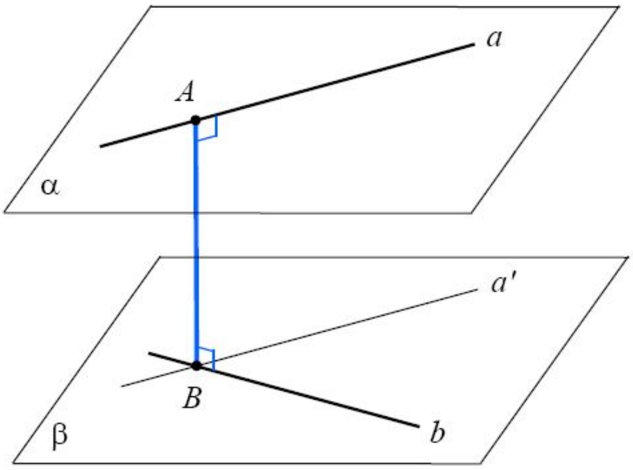


Kako je $a \| \alpha$ i $a \| \beta_1$, tada je $a \| s$. Dalje, kako je $a \| s$ i $b \| s$, tada je $a \| b$, što je nemoguće. $\square$

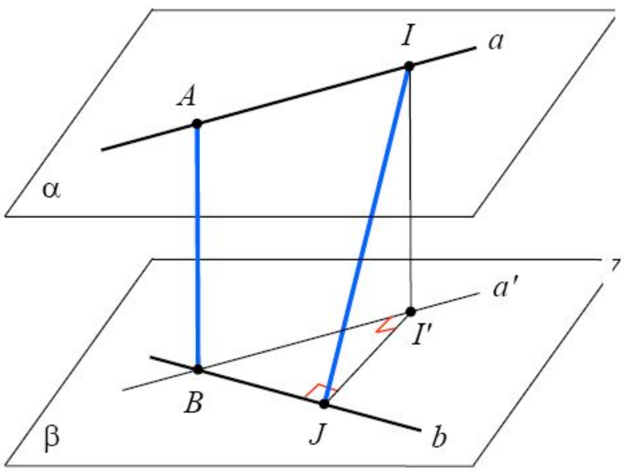
Teorema 1.16

Za svaku od dvije mimoilazne prave postoji jedna i samo jedna zajednička normala.

Dokaz. Prvo pokažimo egzistenciju normale. Neka su a i b dvije mimoilazne prave i neka je α ravan koja sadrži pravu a i β ravan koja sadrži pravu b i neka je $\alpha \| \beta$. Neka je prava a' ortogonalna projekcija prave a na ravan β i neka je $a' \cap b = \{B\}$. Posmatrajmo tačku A čija je ortogonalna projekcija na ravan β tačka B. Tada je $AB \perp a$ i $AB \perp b$.



Pokažimo sada jedinstvenost normale. Pretpostavimo da postoji još jedna zajednička normala i označimo je sa IJ. Neka je $I' \in a'$ takva da je $AB \| II'$. Tada je $II' \perp \beta$ jer je $AB \perp \beta$. Kako je $IJ \perp b$ kao zajednička normala, tada je $I'J \perp b$. Kako su $a \perp IJ$ i $a' \perp II'$ tada je $a \perp II'J$. Dalje, kako je $a' \| a$ tada je i $a' \perp II'J$, odakle zaključujemo da je $a' \perp I'J$.

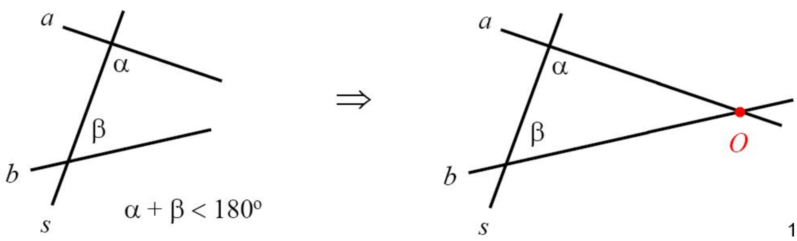


Dakle, iz činjenica da $b \perp I'J$ i $a \perp I'J$, ako posmatramo trougao $\triangle I'JB$ zaključujemo da je $\sphericalangle I' = \sphericalangle J = 90°$, što je nemoguće. $\square$

1.1 Ekvivalenti aksioma paralelnosti

Osnovni ekvivalent aksioma paralelnosti V_E predstavlja peti Euklidov postulat koji je najpoznatiji postulat euklidove geometrije i koji je uvijek privlačio najviše pažnje. On ustvari navodi činjenicu da postoji paralelizam u prirodi. Peti Euklidov postulat glasi

Ako prave a i b presječene pravom p obrazuju par unutrašnjih suprotnih uglova čiji je zbir manji od ravnog ugla, tada se prave a i b sijeku i tačka presjeka je sa one strane prave p sa koje su navedeni uglovi.



Prisjetimo se osobine iskazane sljedećim teoremom a koja će nam trebati u dokazivanju ekvivalencija.

Teorema 1.17

Ako dvije prave pri presjeku sa trećom obrazuju podudarne naizmenične ili podudarne saglasne uglove, ili je zbir dva suprotna ugla jednak zbiru dva prava ugla, tada su te dvije prave paralelne.

Teorema 1.18

Aksiom V_E je ekvivalentan sa petim Euklidovim postulatom.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka vrijedi aksiom V_E. Neka su a i b dvije prave koje siječe prava p u tačkama P i P' i neka prave a i b sa presječnom pravom p obrazuju par unutrašnjih suprotnih uglova čiji je zbir manji od ravnog ugla. Pretpostavimo da je $a \cap b = \emptyset$. Označimo sa $b' \neq b$ pravu koja sadrži tačku P' takva da prave a i b' sa pravom p obrazuju jednake saglasne uglove. Tada su na osnovu Teoreme 1.17 prave a i b' paralelne, tj. $a \cap b' = \emptyset$. Činjenice $a \cap b = \emptyset$, $a \cap b' = \emptyset$ i $b' \neq b$ su u suprotnosti sa aksiomom V_E.

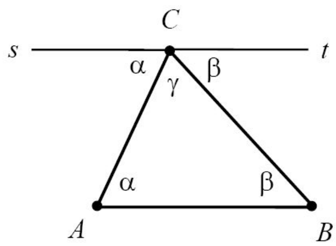
($\Leftarrow$) Neka vrijedi peti Euklidov postulat. Posmatrajmo pravu a i tačku $A \notin a$. Neka je prava p prava koja sadrži tačku A i koja je okomita na pravu

a i neka prava b prava koja sadrži tačku A i koja je okomita na pravu p. Tada na osnovu Teoreme 1.17 vrijedi $a \cap b = \emptyset$. Posmatrajmo pravu $a' \neq b$ koja sadrži tačku A takvu da je unutrašnji ugao kojeg grade prava a' i prava p jednak $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Budući da je $\alpha + \frac{\pi}{2} < \pi$ tada je na osnovu petog Euklidovog aksioma $a' \cap b \neq \emptyset$. Dakle vrijedi aksiom V_E. $\square$

Teorema 1.19

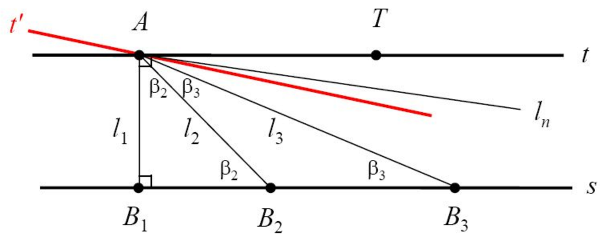
Aksioma V_E ekvivalentna je sa tvrđenjem: "Zbir unutrašnjih uglova svakog trougla jednak je ravnom uglu".

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka vrijede aksiome $(I)-(III)$ i V_E. Posmatrajmo $\triangle ABC$. Konstruišimo pravu s koja sadrži tačku C takvu da je $\sphericalangle ACs = \alpha$. Tada je na osnovu Teoreme 1.17 $s \cap AB = \emptyset$. Analogno, konstruišimo pravu t koja sadrži tačku C takvu da je $\sphericalangle BCt = \beta$, pa je i $t \cap AB = \emptyset$. Budući da vriejdi V_E tada je $s \equiv t$ pa je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

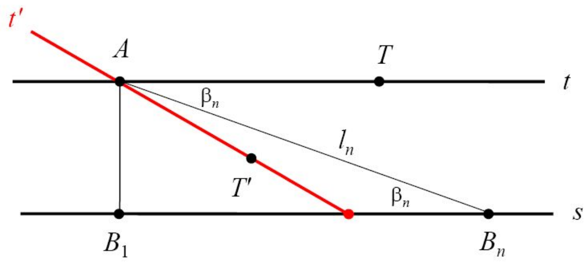


($\Leftarrow$) Neka vrijede aksiome $(I)-(III)$ i činjenica da je zbir unutrašnjih uglova svakog trougla jednak je ravnom uglu. Posmatrajmo pravu s i tačku $A \notin s$. Neka je $B_1 = \omega_s(A)$ tj. prava $l_1 = AB_1 \perp s$. Posmatrajmo pravu t koja sadrži tačku A a koja je okomita na pravu l_1. Na osnovu Teoreme 1.17 prave s i t se ne sijeku. Dokazaćemo da je t jedina prava koja sadrži tačku A a koja ne siječe pravu s. Neka je t' proizvoljna prava koja sadrži tačku A takva da je $t' \neq t$. Dokažimo da prava t' siječe pravu s.

Odaberimo na pravoj s tačku B_2 takvu da je $B_1B_2 = AB_1$. Tada je $\beta_2 = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2^2}$ pa je $\sphericalangle B_2AT = \sphericalangle l_2 t = \frac{\pi}{2^2}$ pri čemu je l_2 prava koja sadrži tačke A i B_2 (budući da je zbir unutrašnjih uglova svakog trougla jednak je ravnom uglu). Na isti način odaberimo na pravoj s tačku B_3 takvu da je $B_2B_3 = AB_2$. Tada je $\beta_3 = \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2^3}$ pa je $\sphericalangle B_3AT = \sphericalangle l_3 t = \frac{\pi}{2^3}$ pri čemu je l_3 prava koja sadrži tačke A i B_3. Analagno biramo tačke $B_4, B_5, \ldots B_n$ takve da je $\sphericalangle B_nAT = \sphericalangle l_n t = \frac{\pi}{2^n}$.



Postoji prirodan broj n (Na osnovu teoreme koja je posljedica aksioma neprekidnosti, Geometrija I) takav da je $\beta_n = \dfrac{\pi}{2^n} < \sphericalangle T'AT$. Dakle, prava t' leži u unutrašnjosti ugla $\sphericalangle B_1AB_n$ pa siječe pravu s.



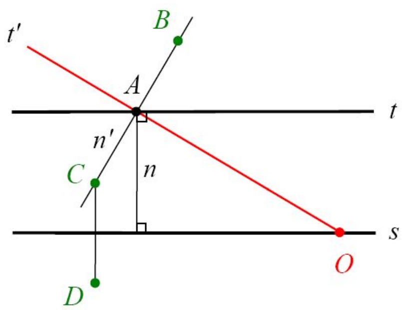
□

Teorema 1.20

Aksioma V_E ekvivalentna je sa tvrđenjem: "Oko svakog trougla može da se opiše kružnica".

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka vrijedi V_E. Posmatrajmo $\triangle ABC$ u kojem su s_a i s_b simetrala stranica a i b redom. Pokažimo da se te dvije simetrale sijeku. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $s_a \| s_b$. Kako je $BC \perp s_a$ tada je $BC \perp s_b$. Budući da je $AC \perp s_b$ onda je $AC \equiv BC$ što je nemoguće.

($\Leftarrow$) Neka vrijedi da se oko svakog trougla može da se opiše kružnica. Posmatrajmo pravu s i tačku $A \notin s$.



Konstruišimo pravu n koja sadrži tačku A takva da je $n \perp s$. Konstruišimo pravu t koja sadrži tačku A takva da je $t \perp n$. Tada je na osnovu Teoreme 1.17 $t \cap s = \emptyset$. Neka je t' proizvoljna prava različita od prave t koja sadrži tačku A. Pokažimo da je $t' \cap s \neq \emptyset$. Konstruišimo pravu n' koja sadrži tačku A takva da je $n' \perp t'$ i odaberimo tačke $B, C \in n'$ takve da je tačka A središte duži BC. Neka je D tačka koja je simetrična tački C u odnosu na pravu s. Posmatrajmo $\triangle BCD$. Prave s i t' su simetrale stranica CD i BC, respektivno, pa na osnovu pretpstavke da se oko svakog trougla može da se opiše kružnica vrijedi $s \cap t' = \{O\}$ $\square$

Lema 1.21

Ako je zbir uglova u jednom trouglu jednak π, tada je zbir uglova u svakom trouglu jednak π..

Aksioma V_E ekvivalentna je sa tvrđenjem u Lemi 1.21.

Definicija 1.22

Uglovni defekt $\triangle ABC$, kojeg označavamo sa $\delta(\triangle ABC)$, je

$$\delta(\triangle ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

pri čemu su α, β, γ unutrašnji uglovi $\triangle ABC$.

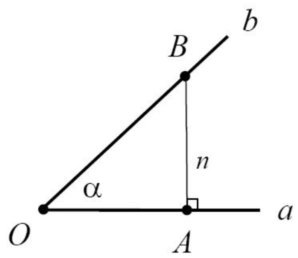
Lema 1.23

Aksioma V_E ekvivalentna je sa tvrđenjem: "Postoji trougao čiji je uglovni defekt jednak 0".

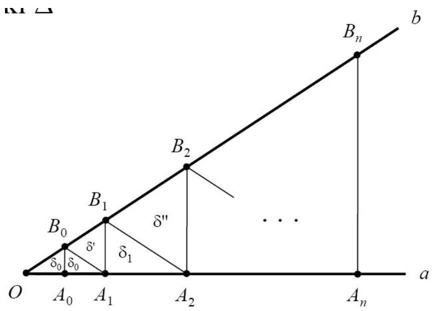
Teorema 1.24

Aksioma V_E ekvivalentna je sa tvrđenjem: "Ako $\sphericalangle aOb$ oštar, tada sve normale povučene na krak a sijeku krak b".

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka vrijedi V_E i posmatrajmo oštar ugao $\sphericalangle aOb$. Odaberimo tačku $A \in a$ i konstruišimo pravu n koja sadrži tačku A takvu da je $n \perp a$. Kako je $\sphericalangle aOb + \sphericalangle OAB = \sphericalangle aOb + 90° < 180°$, onda se, na osnovu aksioma V_E, prave n i b sijeku.



(⇐) Da bi dokazali obrnutu implikaciju, koristit ćemo Lemu 1.23. Pretpostavimo da je uglovni defekt svakog trougla veći od 0. Na kraku a odaberimo tačku A_0 i konstruišimo normalu n_0 na krak a u tački A_0. Na osnovu pretpostavke da sve normale povučene na krak a sijeku krak b, prava n_0 siječe krak b u tački B_0. Neka je $\delta(\triangle OA_0B_0) = \delta_0 > 0$. Izaberimo tačku $A_1 \in a$ takvu da je $\delta(\triangle A_0A_1B_0) = \delta_0 > 0$ te u tački A_1 konstruišimo normalu n_1 na krak a koja će opet sjeći krak b u tački B_1. Neka je $\delta(\triangle A_1B_0B_1) = \delta' > 0$. Tada je $\delta_1 = \delta(\triangle OA_1B_1) = 2\delta_0 + \delta' > 2\delta_0$. Nastavljajući ovaj postupak dobićemo niz tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i $B_1, B_2, \ldots, B_n$ te niz trouglova $\triangle OA_nB_n$ takvih da je $\delta_n = \delta(\triangle OA_nB_n) > 2^n\delta_0$. Uvijek možemo odabrati $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $\delta_n > 2^n\delta_0 > 180°$. S druge strane u $\triangle OA_nB_n$ vrijedi da je $\delta_n = 180° - (\sphericalangle O + \sphericalangle A_n + \sphericalangle B_n)$ odakle dobijamo da je $\sphericalangle O + \sphericalangle A_n + \sphericalangle B_n = 180° - \delta_n < 0$ zbog $\delta_n > 180°$, što je nemoguće.



□

Poglavlje 2

Transformacije podudarnosti u prostoru

Neka je $\mathcal{P}$ prostor.

Definicija 2.1

Bijektivno preslikavanje $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ se zove transformacija podudarnosti u prostoru ako $\forall A, B \in \mathcal{P}$ vrijedi

$$[f(A)f(B)] \cong [AB].$$

Sa I ćemo označavati *indetičko preslikavanje*, tj. preslikavanje za koje je

$$I(X) = X, \ (\forall X \in \mathcal{P}).$$

Neka su $f, g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ dvije transformacije podudarnosti. Kompoziciju (proizvod) preslikavanja f i g, u oznaci $f \cdot g$, definišemo kao

$$(f \cdot g)(X) = f(g(X)), \ (\forall X \in \mathcal{P}).$$

Jasno je da za svako preslikavanje f vrijedi $I \cdot f = f \cdot I = f$ kao i $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = I$.

Teorema 2.2

Skup svih transformacija podudarnosti u prostoru obrazuje grupu (nekomutativnu) u odnosu na kompoziciju.

Teorema 2.3

Svaka podudarnost u prostoru preslikava:

(a) kolinearne tačke na kolinearne tačke i pritom $A - B - C \Rightarrow A' - B' - C'$;

(b) nekolinearne tačke na nekolinearne tačke;

(c) polupravu na polupravu;

(d) duž na podudarnu duž;

(e) ugao na podudaran ugao;

(f) trougao na podudaran trougao;

(g) poluravan na poluravan;

(h) poluprostor na poluprostor.

Teorema 2.4

Ako su A i B fiksne tačke podudarnosti u prostoru, tada su to sve tačke prave AB.

Dokaz. Neka su A i B fiksne tačke podudarnosti u prostoru. Tada je $f(A) = A' = A$ i $f(B) = B' = B$. Neka je $X \in p(A, B)$ i neka je $f(X) = X'$. Tada na osnovu Teoreme 2.3 pod (a) vrijedi $X' \in p(A', B') = p(A, B)$. Posmatrajmo sljedeće slučajeve u odnosu na raspored tačaka X, A, B:

(i) Neka je $X - A - B$. Tada na osnovu Teoreme 2.3 pod (a) vrijedi $X' - A' - B'$, tj. $X' - A_B$. Daljek, na osnovu Teoreme 2.3 pod (d) vrijedi $[X'A] \cong [XA]$, iz čega zaključujemmo da je $X' = X$.

(ii) Neka je $A - X - B$. Dokaz je isti kao u slučaju (i).

(iii) Neka je $A - B_X$. Dokaz je isti kao u slučaju (i).

$\square$

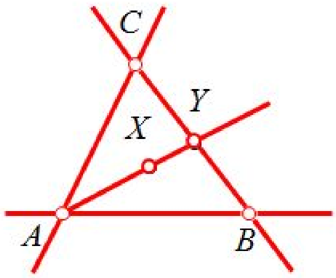
Teorema 2.5

Ako su nekolinearne tačke A, B, C fiksne tačke podudarnosti u prostoru, tada su to sve tačke ravni $r(ABC)$.

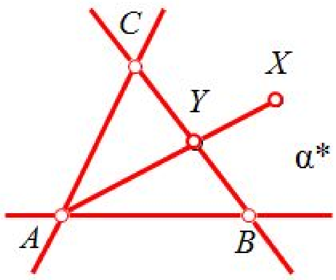
Dokaz. Neka su nekolinearne tačke A, B, C fiksne tačke podudarnosti u prostoru. Tada je $f(A) = A' = A$, $f(B) = B' = B$ i $f(C) = C' = C$. Posmatrajmo $\triangle ABC$. Posmatrajmo proizvoljnu tačku X iz ravni ABC. Razmatrajmo sljedeće slučajeve:

(i) Ako $x \in p(B, C) \cup p(C, A) \cup p(A, B)$, tada na osnovu Teoreme 2.4 vrijedi $f(X) = X$.

(ii) Neka je $X \in \text{int}\triangle ABC$ i neka je $p(A, X) \cap [BC] = \{Y\}$. Tada na osnovu Teoreme 2.4 vrijedi $f(Y) = Y$, pa je i $f(X) = X$.



(iii) Neka je $X \in \text{ext}\triangle ABC$. Tada tačka $X \in \alpha^* \cup \beta^* \cup \gamma^*$. Neka $X \in \alpha^*$ neka je $[AX] \cap p(B, C) = \{Y\}$. Tada na osnovu Teoreme 2.4 vrijedi $f(Y) = Y$, pa je i $f(X) = X$.



$\square$

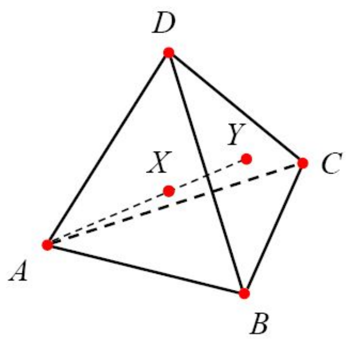
Teorema 2.6

Ako je f podudarnost u prostoru koja ima četiri nekoplanarne fiksne tačke, tada je $f = I$.

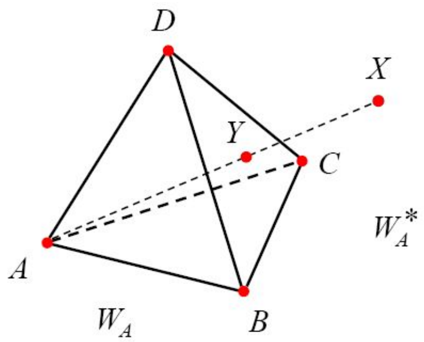
Dokaz. Posmatrajmo četiri nekoplanarne tačke A, B, C i D koje obrazuju tetraedar $ABCD$. Budući da su tačke A, B, C i D fiksne tačke preslikavanja f tada je $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$ i $f(D) = D$. Razmatramo sljedeće slučajeve:

(i) Posmatrajmo tačku X koja leži na omotaču tetraedra, tj. $X \in r(ABC) \cup r(ABD) \cup r(ACD) \cup r(BCD)$. Tada je na osnovu Teoreme 2.5 $f(X) = X$.

(ii) Posmatrajmo tačku X koja pripada unutrašnjosti tetraedra $ABCD$. Posmatrajmo pravu $p(A, X)$ i neka je $p(A, X) \cap r(BCD) = \{Y\}$. Tada je na osnovu Teoreme 2.5 $f(Y) = Y$ a onda je na osnovu Teorem 2.4 $f(X) = X$.



(iii) Posmatrajmo tačku X koja pripada oblasti van tetraedra $ABCD$, tj. $X \in W_A^* \cup W_B^* \cup W_C^* \cup W_D^*$. Neka naprimjer $X \in W_A^*$. Posmatrajmo pravu $p(A, X)$ i neka je $p(A, X) \cap r(BCD) = \{Y\}$.Tada je na osnovu Teoreme 2.5 $f(Y) = Y$ a onda je na osnovu Teorem 2.4 $f(X) = X$.



Dakle, $f(X) = X$, $\forall X \in \mathcal{P}$ pa je $f = I$. $\square$

Teorema 2.7

Ako za podudarnosti u prostoru f i g važi: $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$, $f(C) = g(C)$, $f(D) = g(D)$, gdje su A, B, C i D nekoplanarne tačke, tada je $f = g$, tj. $f(X) = g(X)$ za $\forall X \in \mathcal{P}$.

Dokaz. Definišemo preslikavanje $h = g^{-1} \cdot f$. Tada je

$$h(A) = (g^{-1} \cdot f)(A) = g^{-1}(f(A)) = g^{-1}(g(A)) = (g^{-1} \cdot g)(A) = I(A) = A.$$

Slično pokazujemo da je $h(B) = B$, $h(C) = C$ i $h(D) = D$. Tada, na osnovu Teoreme 2.6, vrijedi $h = I$ odakle je $g^{-1} \cdot f = I$ odnosno $f = g$. $\square$

2.1 Ravanska simetrija

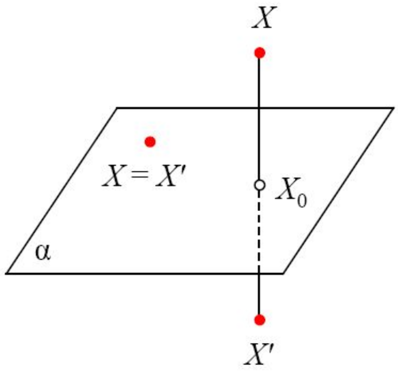
Neka je $\mathcal{P}$ prostor i α ravan u prostoru.

Definicija 2.8

Ravanska simetrija je preslikavanje $\Sigma_\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ koje svakoj tački $X \in \mathcal{P}$ pridružuje tačku $X' \in \mathcal{P}$ na sljedeći način:

(a) $X \in \alpha \Rightarrow X' \equiv X$;

(b) $X \notin \alpha$ onda posmatramo pravu $p(X, X') \perp \alpha$ takva da je $p(X, X') \cap \alpha = \{X_0\}$ i tako da je $[XX_0] \cong [X_0X']$.



Teorema 2.9

Ako je $\Sigma_\alpha(X) = X'$ onda je $\Sigma_\alpha(X') = X$.

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz Definicije 2.8. □

Teorema 2.10

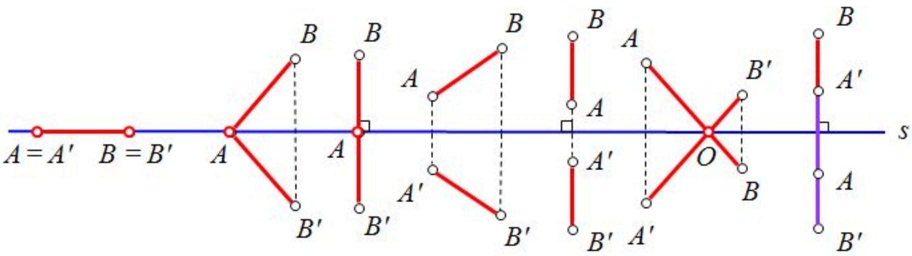
Za ravansku simetriju vrijedi $\Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha = I$, odnosno $\Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha^{-1}$.

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz Definicije 2.8. □

Teorema 2.11

Ravanska simetrija je podudarnost.

Dokaz. Razmatrati sljedeće slučajeve



□

Teorema 2.12

Tačka X je fiksna tačka ravanske simetrije Σ_α akko $X \in \alpha$.

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz Definicije 2.8. $\square$

Teorema 2.13

Prava s je fiksna prava ravanske simetrije Σ_α akko $s \subset \alpha \vee s \perp \alpha$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka je $s \subset \alpha \vee s \perp \alpha$. Tada na osnovu Definicije 2.8 vrijedi $\Sigma_\alpha(s) = s$.

($\Rightarrow$) Neka je $\Sigma_\alpha(s) = s$. Pretpostavimo $s \not\subset \alpha \wedge s \not\perp \alpha$. Budući da $s \not\subset \alpha$ tada postoji tačka $X \in s$ i $X \notin \alpha$ takva da je $\Sigma_\alpha(X) = X' \neq X$. S druge strane, kako je $\Sigma_\alpha(s) = s$ onda $X' \in s$ pa je $s = p(X, X') \perp \alpha$ što je kontradiktorno sa pretpostavkom da $s \not\perp \alpha$. $\square$

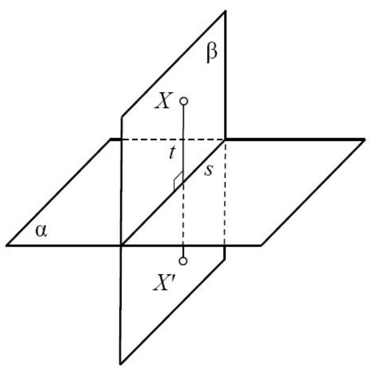
Teorema 2.14

Ravan β je fiksna ravan ravanske simetrije Σ_α akko $\beta \subset \alpha \vee \beta \perp \alpha$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka je $\beta = \alpha \vee \beta \perp \alpha$. Tada

(i) ako je $\beta = \alpha$ onda je $\Sigma_\alpha(\beta) = \Sigma_\alpha(\alpha) = \alpha = \beta$;

(ii) ako je $\beta \perp \alpha$, tada je $\alpha \cap \beta = \{s\}$. Odaberimo tačku $X \in \beta$ i pravu $t(X) \subset \beta$ i $t(X) \perp s$. Tada je $t \perp \alpha$ i na osnovu Teoreme 2.13 vrijedi $\Sigma_\alpha(t) = t$. To dalje znači da je $\Sigma_\alpha(X) = X' \in t$, tj. $\Sigma_\alpha(X) \in \beta$ za svaku tačku $X \in \beta$. Dakle, $\Sigma_\alpha(\beta) = \beta$.



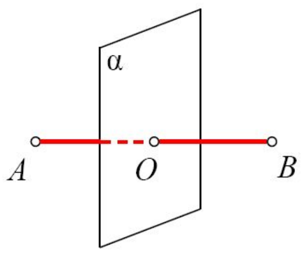
(⇒) Neka je $\Sigma_\alpha(\beta) = \beta$. Pretpostavimo $\beta \not\subset \alpha \wedge \beta \not\perp \alpha$. Kako je $\beta \neq \alpha$, tada postoji tačka $X \in \beta$ i $X \notin \alpha$ takva da je $\Sigma_\alpha(X) = X' \neq X$ i $p(X, X') \perp \alpha$. S druge strane, kako je $\Sigma_\alpha(\beta) = \beta$ tada $X' \in \beta$ pa je $p(X, X') \subset \beta$. Odavdje zaključujemo da je $\beta \perp \alpha$ što je kontradiktorno sa pretpostavkom $\beta \not\perp \alpha$. □

Definicija 2.15

Ravan α je simetralna ravan duži $[AB]$ ako vrijedi:

(a) $O \in \alpha$ tada je O središte duži $[AB]$;

(b) $\alpha \perp p(A, B)$.



Teorema 2.16

Za svaku duž postoji jedna i samo jedna simetralna ravan.

Teorema 2.17

Tačka X pripada simetralnoj ravni duži $[AB]$ akko je $[XA] \cong [XB]$.

Teorema 2.18

Ravan α je simetralna ravan duži $[AB]$ akko je $\Sigma_\alpha(A) = B$.

Teorema 2.19

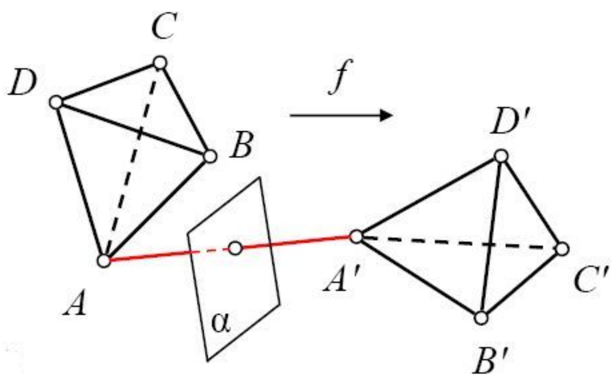
Svaka podudarnost u prostoru može se predstaviti kao proizvod najviše četiri ravanske simetrije.

Dokaz. Neka je f podudarnost u prostoru i neka su A, B, C, D nekoplanarne tačke koje čine tetraedar. Tada je

$$f(A) = A',\ f(B) = B',\ f(C) = C',\ f(D) = D'. \tag{2.1}$$

Neka je α simetralna ravan duži $[AA']$. Tada je

$$\Sigma_\alpha(A) = A',\ \Sigma_\alpha(B) = B_1,\ \Sigma_\alpha(C) = C_1,\ \Sigma_\alpha(D) = D_1.$$



Neka je β simetralna ravan duži $[B_1B']$. Tada je

$$\Sigma_\beta(A') = A',\ \Sigma_\beta(B_1) = B',\ \Sigma_\beta(C_1) = C_2,\ \Sigma_\beta(D_1) = D_2.$$

Neka je γ simetralna ravan duži $[C_2C']$. Tada je

$$\Sigma_\gamma(A') = A',\ \Sigma_\gamma(B') = B',\ \Sigma_\gamma(C_2) = C',\ \Sigma_\gamma(D_2) = D_3.$$

Neka je δ simetralna ravan duži $[D_3D']$. Tada je

$$\Sigma_\delta(A') = A',\ \Sigma_\delta(B') = B',\ \Sigma_\delta(C') = C',\ \Sigma_\delta(D_3) = D'.$$

Dakle, vrijedi

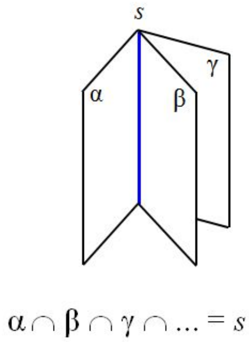
$$(\Sigma_\delta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha)(A) = A',\ (\Sigma_\delta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha)(B) = B',$$
$$(\Sigma_\delta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha)(C) = C',\ (\Sigma_\delta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha)(D) = D',$$

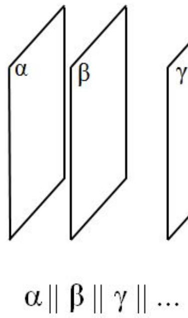
pa na osnovu (2.1) i Teoreme 2.7 vrijedi $f = \Sigma_\delta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha$. □

Transformacija koja je proizvod parnog broja ravanskih simetrija naziva se *podudarnost prve vrste* a transformacija koja je proizvod neparnog broja ravanskih simetrija naziva se *podudarnost druge vrste.* Kako je podudarnost u prostoru proizvod najviše četiri ravanske simetrije, tada svaka podudarnost prve vrste u prostoru se može predstaviti kao proizvod dvije ili četiri ravanske simetrije dok se podudarnost druge vrste u prostoru može predstaviti kao jedna ili proizvod tri ravanske simetrije.

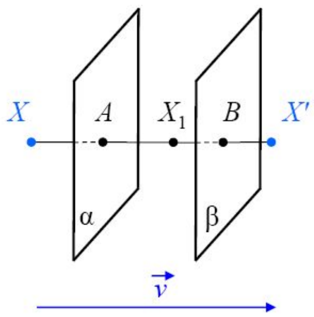
Definicija 2.20

Pramen ravni je skup ravni koje ili sadrže istu pravu (eliptični pramen ravni) ili su ortogonalne na istu pravu (hiperbolični pramen ravni).

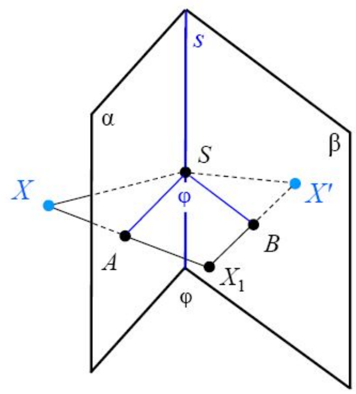




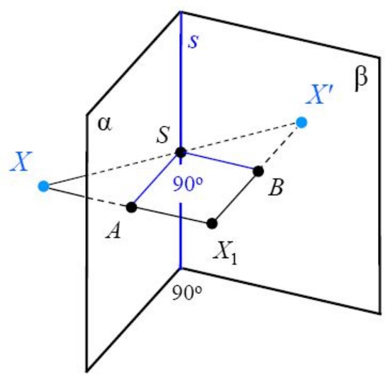
Neka su α i β paralelne ravni (iz hiperboličkog pramena ravni). Proizvod dvije ravanske simetrije $\Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha$ je transformacija podudarnosti u prostoru koja se naziva *translacija* za vektor $\overrightarrow{v}$ i koju označavamo sa $T_{\overrightarrow{v}}$. Vrijedi $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AB}$.



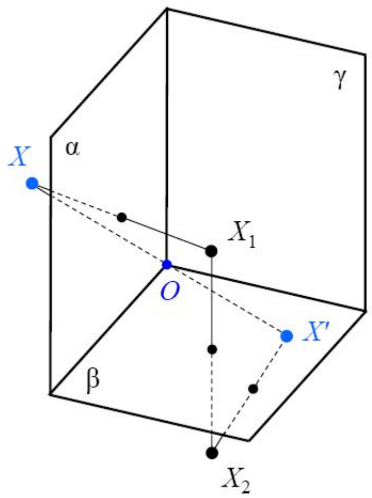
Neka su α i β dvije ravni koje se sijeku (iz eliptičkog pramena ravni) i neka je $\alpha \cap \beta = \{s\}$. Proizvod dvije ravanske simetrije $\Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha$ je transformacija podudarnosti u prostoru koja se naziva *rotacija* oko ose s i koju označavamo sa $P_s^{2\varphi}$, pri čemu je φ ugao između ravni α i β.



Specijalan slučaj je kada su ravni α i β ortogonalne. U tom slučaju proizvod dvije ravanske simetrije nazivamo *osna simetrija* u prostoru i označavamo je sa P_s^{π}.



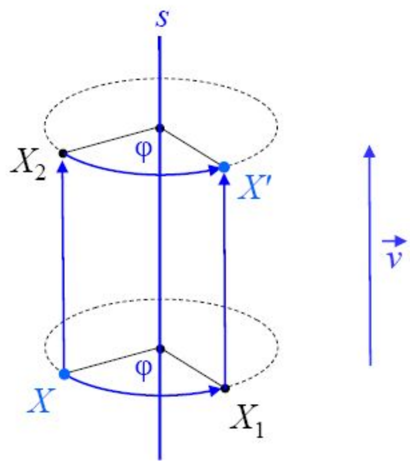
Neka su α, β i γ tri ravni od kojih su svake dvije ortogonalne. Tada postoji tačka koja je incidentna sa svakom od njih. Proizvod tri ravanske simetrije $\Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha$ je transformacija podudarnosti u prostoru koja se naziva *centralna simetrija* u prostoru koju označavamo sa Σ_O. Tačka O je centar simetrije i to je jedina dvojna tačka preslikavanja Σ_O. Za proizvoljnu tačku X u prostoru, tačka $\Sigma_O(X) = X'$ je jednoznačno određena i tačka O je sredina duži XX'.



Centralnu simetriju Σ_O možemo predstaviti kao proizvod tri ravanske simetrije u bilo kojem redoslijedu.

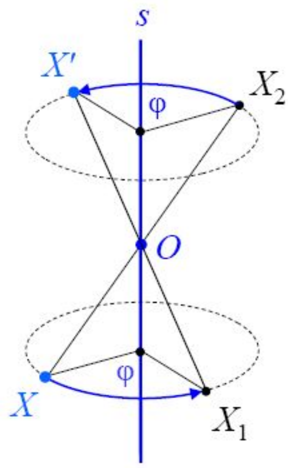
Možemo posmatrati i neke proizvode navedenih transformacija.

Proizvod translacije i rotacije $T_{\overrightarrow{v}} \cdot P_s^{\varphi}$, pri čemu je $\overrightarrow{v} \| s$ naziva se *rotaciona translacija*.



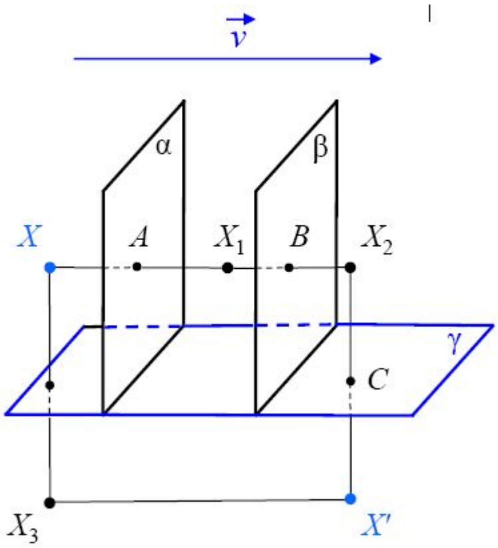
Također vrijedi $T_{\overrightarrow{v}} \cdot P_s^{\varphi} = P_s^{\varphi} \cdot T_{\overrightarrow{v}}$.

Proizvod centralne simetrije i rotacije $\Sigma_O \cdot P_s^{\varphi}$, pri čemu je $O \in s$ naziva se *rotaciona simetrija*.



Također vrijedi $\Sigma_O \cdot P_s^\varphi = P_s^\varphi \cdot \Sigma_O$.

Proizvod ravanske simetrije i translacije $\Sigma_\gamma \cdot T_{\vec{v}}$, pri čemu je $\alpha \| \beta$ i $\gamma \perp \alpha, \beta$ naziva se *klizna simetrija*.



Također vrijedi $\Sigma_\gamma \cdot T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \cdot \Sigma_\gamma$.

Teorema 2.21

Ako transformacija podudarnosti preslikava poluravan u tu istu poluravan tada je ona ili identičko preslikavanje ili ravanska simetrija.

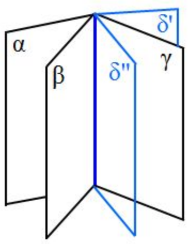
Teorema 2.22

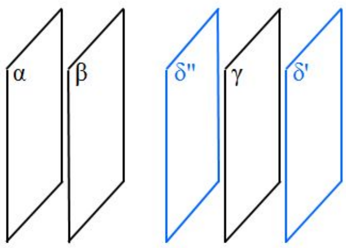
Proizvod tri simetrije u odnosu na ravni iz istog pramena je ravanska simetrija. Odgovarajuća ravan je iz istog pramena ravni.

Dokaz. □

Teorema 2.23

Ako su ravni α, β i γ is istog pramena P, tada postoje dvije ravni $\delta', \delta'' \in P$ takve da je $\Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha = \Sigma_{\delta'} \cdot \Sigma_\gamma = \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_{\delta''}$.





Dokaz. Direktno slijedi iz Teoreme 2.22. □

Teorema 2.24

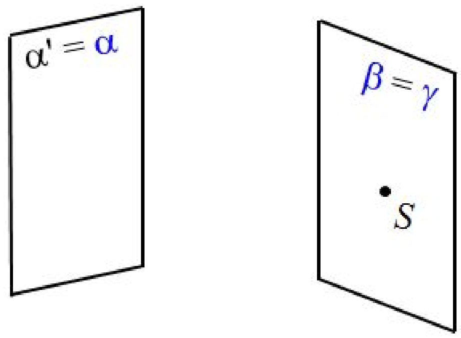
Ako je f podudarnost II vrste u prostoru i S proizvoljna tačka, tada postoje ravni α, β, γ takve da je $f = \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha$ i $S \in \beta \cap \gamma$.

Dokaz. Neka je f podudarnost II vrste. Tada je $f = \Sigma_{\alpha'}$ ili $f = \Sigma_{\gamma'} \cdot \Sigma_{\beta'} \cdot \Sigma_{\alpha'}$.

Ako je $f = \Sigma_{\alpha'}$. Odaberimo $\alpha = \alpha'$ i $S \in \beta = \gamma$. Tada je

$$f = \Sigma_{\alpha'} = I \cdot \Sigma_\alpha = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha = \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha$$

i $S \in \beta \cap \gamma$.

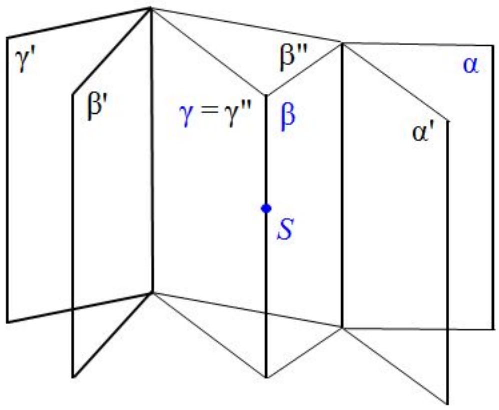


Ako je $f = \Sigma_{\gamma'} \cdot \Sigma_{\beta'} \cdot \Sigma_{\alpha'}$, tada odaberimo ravan $\gamma'' \in P(\gamma', \beta')$ i $S \in \gamma''$. Tada, na osnovu Teoreme 2.23 postoji ravan $\beta'' \in P(\gamma', \beta', \gamma'')$ takva da je $\Sigma_{\gamma'} \cdot \Sigma_{\beta'} = \Sigma_{\gamma''} \cdot \Sigma_{\beta''}$, pa je prema tome

$$f = \Sigma_{\gamma''} \cdot \Sigma_{\beta''} \cdot \Sigma_{\alpha'}. \tag{2.2}$$

Odaberimo sada ravan $\beta \in P(\alpha', \beta'')$ i $S \in \beta$. Tada, na osnovu Teoreme 2.23 postoji ravan $\alpha \in P(\alpha'', \beta'', \beta)$ takva da je

$$\Sigma_{\beta''} \cdot \Sigma_{\alpha'} = \Sigma_{\beta} \cdot \Sigma_{\alpha}. \tag{2.3}$$



Neka je $\gamma'' = \gamma$. Na osnovu (2.2) i (2.3), dobijamo $f = \Sigma_{\gamma} \cdot \Sigma_{\beta} \cdot \Sigma_{\alpha}$ i $S \in \beta \cap \gamma$. $\square$

Teorema 2.25

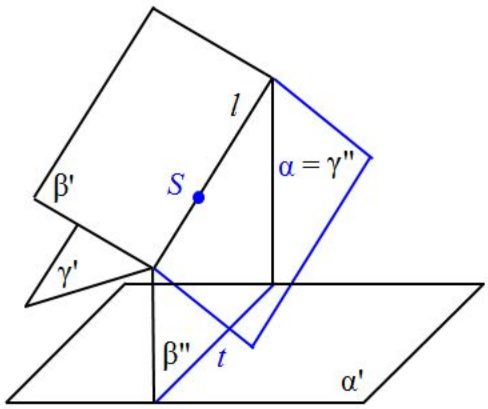
Ako je f podudarnost II vrste u prostoru i S proizvoljna tačka, tada postoje ravan α i prava t, takve da je $f = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t$ i $S \in \alpha$.

Dokaz. Budući da je f podudarnost II vrste, tada na osnovu Teoreme 2.24 vrijedi $f = \Sigma_{\gamma'} \cdot \Sigma_{\beta'} \cdot \Sigma_{\alpha'}$ i $S \in \beta' \cap \gamma' = l$. Konstruišimo ravan $\beta'' \perp \alpha'$ takvu da je $l \subset \beta''$. Tada, na osnovu Teoreme 2.23 postoji ravan $\gamma''(l)$ takva da je $\Sigma_{\gamma'} \cdot \Sigma_{\beta'} = \Sigma_{\gamma''} \cdot \Sigma_{\beta''}$, pa je

$$f = \Sigma_{\gamma''} \cdot \Sigma_{\beta''} \cdot \Sigma_{\alpha'}. \tag{2.4}$$

Neka je $\beta'' \cap \alpha' = t$. Kako je $\beta'' \perp \alpha'$, tada je

$$\Sigma_{\beta''} \cdot \Sigma_{\alpha'} = \Sigma_t. \tag{2.5}$$



Na osnovu (2.4) i (2.5) dobijamo $f = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t$ i $S \in \alpha$. □

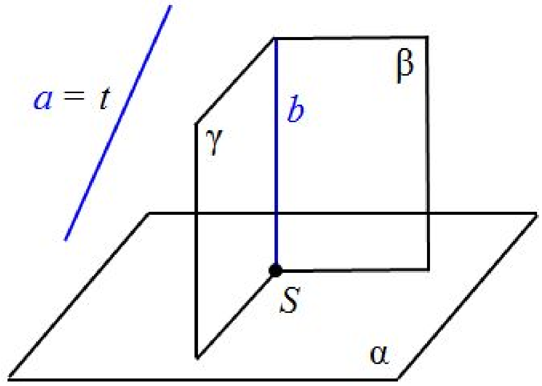
Teorema 2.26

Ako je f podudarnost I vrste u prostoru i S proizvoljna tačka, tada postoje prave a i b takve da je $f = \Sigma_b \cdot \Sigma_a$ i $S \in b$.

Dokaz. Budući da je f podudarnost I vrste, tada je $g = \Sigma_S \cdot f$ podudarnost druge vrste. Tada na osnovu Teoreme 2.25 postoje ravan α i prava t takve da vrijedi $g = \Sigma_S \cdot f = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t$ pri čemu $S \in \alpha$. Dakle,

$$f = \sigma_S \cdot \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t = \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t = \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_t = \Sigma_b \cdot \Sigma_t$$

pri čemu je $b = \beta \cap \gamma$.



Ako odaberemo da je $a = t$, dobijamo $f = \Sigma_b \cdot \Sigma_a$ i $S \in b$. $\square$

Teorema 2.27

Ako je f podudarnost II vrste u prostoru, tada je f jedna od sljedećih transformacija:

(a) ravanska simetrija,

(b) klizna simetrija u prostoru,

(c) centralna simetrija,

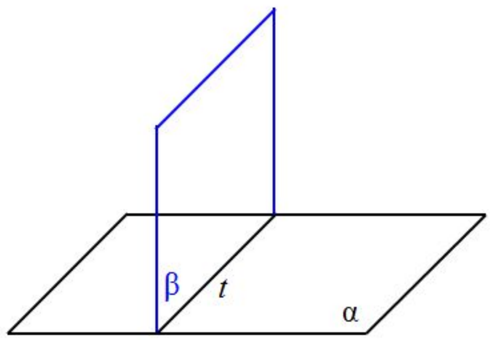
(d) rotaciona simetrija.

Dokaz. Budući da je f podudarnost II vrste, tada na osnovu Teoreme 2.25 postoje ravan α i prava t takve da vrijedi $f = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t$. Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

(a) Ako je $t \subset \alpha$, tada konstruišemo ravan $\beta(t) \perp \alpha$ pa je $\Sigma_t = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\beta$. Sada je

$$f = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\beta = \Sigma_\beta,$$

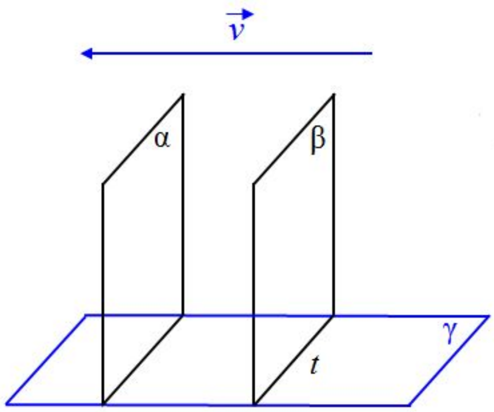
pa je f ravanska simetrija.



(b) Ako je $t \| \alpha$ i $t \not\subset \alpha$, tada konstruišemo ravni $\beta(t) \| \alpha$ i $\gamma(t) \perp \alpha$ pa je

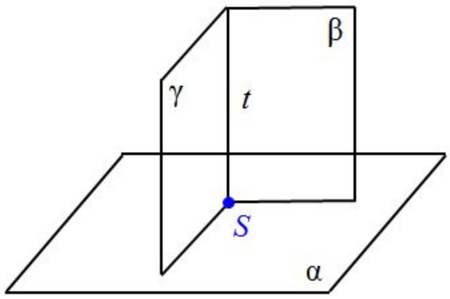
$$f = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\gamma = T_{\overrightarrow{v}} \cdot \Sigma_\gamma,$$

pa je f klizna simetrija u prostoru.



(c) Ako je $t \perp \alpha$ i $t \cap \alpha = \{S\}$, tada konstruišimo dvije ravni $\beta(t)$ i $\gamma(t)$ takve da je $\beta(t) \perp \gamma(t)$. Tada je

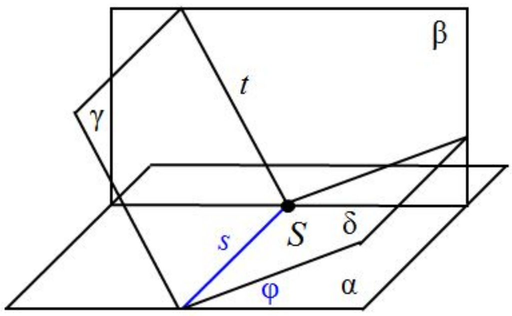
$$f = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\gamma = \Sigma_S,$$



pa je f centralna simetrija.

(d) Ako je $t \not\perp \alpha$ i $t \cap \alpha = \{S\}$, tada konstruišimo dvije ravni $\beta(t)$ i $\gamma(t)$ takve da je $\beta(t) \perp \alpha$ i $\gamma(t) \perp \beta$. Neka je $\gamma \cap \alpha = s(S)$ i neka je ravan $\delta(s) \perp \gamma$ pa vrijedi $\beta \perp \gamma$, $\gamma \perp \delta$ i $\delta \perp \beta$. Tada je

$$f = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_t = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\gamma = (\Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\delta) \cdot (\Sigma_\delta \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\gamma) = P_s^\varphi \cdot \Sigma_S,$$



pa je f rotaciona simetrija.

□

Teorema 2.28

Ako je f podudarnost I vrste u prostoru, tada je f jedna od sljedećih transformacija:

(a) identičko preslikavanje,

(b) translacija,

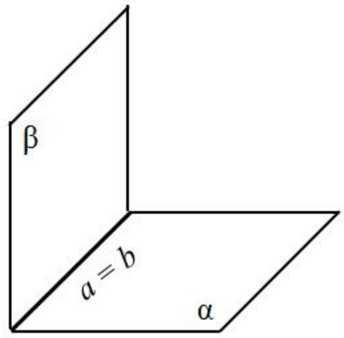
(c) rotacija (osna simetrija),

(d) rotaciona translacija.

Dokaz. Kako je f podudarnost I vrste u prostoru, tada na osnovu Teoreme 2.26 postoje dvije prave a i b takve da je $f = \Sigma_b \cdot \Sigma_a$. Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

(a) Ako je $a \equiv b$. Konstruišimo dvije ravni $\alpha(a)$ i $\beta(b)$ takve da je $\alpha \perp \beta$. Zbog toga je $\Sigma_a = \Sigma_b = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\beta$, pa je

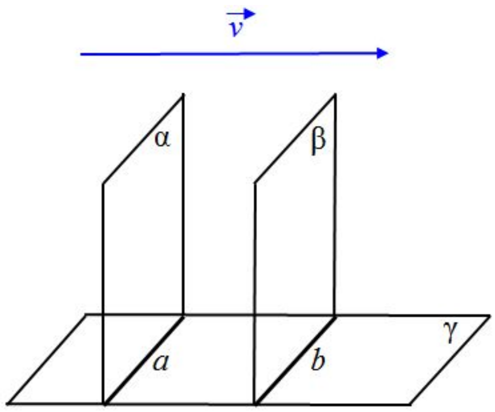
$$f = \Sigma_b \cdot \Sigma_a = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\beta = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\beta = I,$$



pa je f identičko preslikavanje.

(b) Ako je $a \| b$ i $a \neq b$, tada konstruišimo ravan γ koja sadrži obje prave a i b, te konstruišimo ravni $\alpha(a) \perp \gamma$ i $\beta(b) \perp \gamma$. Tada je

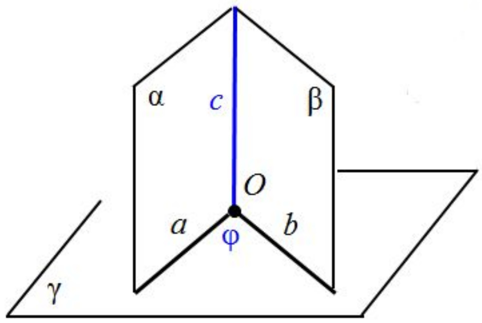
$$f = \Sigma_b \cdot \Sigma_a = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\alpha = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha = T_{\vec{v}},$$



pa je f translacija u prostoru.

(c) Ako je $a \cap b = \{O\}$ i $\sphericalangle aOb = \varphi$, tada konstruišemo ravan γ koja sadrži obje prave a i b, te konstruišimo ravni $\alpha(a) \perp \gamma$ i $\beta(b) \perp \gamma$. Neka je $\alpha \cap \beta = c$. Tada je

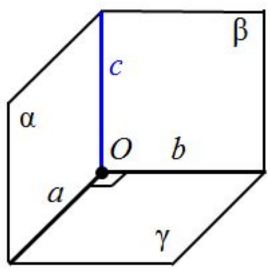
$$f = \Sigma_b \cdot \Sigma_a = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\alpha = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha = P_c^{2\varphi},$$



pa je f rotacija oko ose c.

Specijalan slučaj je kada su prave a i b okomite, tj. $\varphi = 90°$. Tada konstruišemo ravan γ koja sadrži obje prave a i b, te konstruišimo ravni $\alpha(a) \perp \gamma$ i $\beta(b) \perp \gamma$ takve da je $\alpha \perp \beta$. Tada je

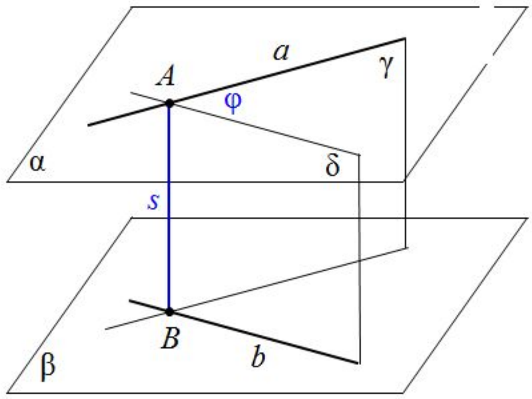
$$f = \Sigma_b \cdot \Sigma_a = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\alpha = \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha = P_c^{180°} = \Sigma_c,$$



pa je f osna simetrija u prostoru.

(d) Ako su prave a i b mimoilazne tada postoje ravni $\alpha(a)$ i $\beta(b)$ takve da je $\alpha \| \beta$. Konstruišimo ravan $\gamma(a) \perp \alpha$. Tada je $\gamma(a) \perp \beta$. Konstruišimo ravan $\delta(b) \perp \beta$ i neka je $\gamma \cap \delta = s$ i označimo $\sphericalangle\gamma\delta = \varphi$. Odavdje zaključujemo da je $s \perp \alpha$ i $s \perp \beta$. Tada je

$$f = \Sigma_b \cdot \Sigma_a = \Sigma_\delta \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\alpha = \Sigma_\delta \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Sigma_\beta \cdot \Sigma_\alpha = P_s^{2\varphi} \cdot T_{2\overrightarrow{AB}},$$



pa je f rotaciona simetrija.

□

Na osnovu svega ranije izloženog možemo zaključiti sljedeće.

Teorema 2.29

Transformacija podudarnosti u prostoru je jedna od ovih transformacija:

(a) identična transformacija;

(b) simetrija u odnosu na ravan;

(c) rotacija (u specijalnom slučaju osna simetrija);

(d) translacija;

(e) centralna simetrija;

(f) rotaciona translacija;

(g) klizna simetrija;

(h) rotaciona simetrija.

Poglavlje 3

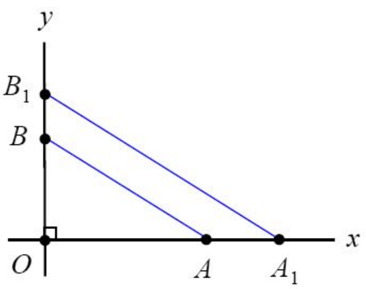
Sličnost

3.1 Proporcionalnost duži

Posmatrajmo dvije međusobno okomite prave x i y koje se sijeku u tački O i tačke $A, A_1 \in x$ te $B, B_1 \in y$. Označimo sa $OA = a$, $OA_1 = a_1$, $OB = b$ i $OB_1 = b_1$.

Definicija 3.1

Kažemo da je uređeni par (a, a_1) proporcionalan paru (b, b_1) i to zapisujemo kao $a : a_1 = b : b_1$ ako je $AB \| A_1B_1$.



Teorema 3.2

Ako je $a : a_1 = b : b_1$, tada je:

(a) $b : b_1 = a : a_1$;

(b) $a_1 : a = b_1 : b$;

(c) $b_1 : b = a_1 : a$.

Dokaz. (a) Kako je $a : a_1 = b : b_1$ tada je $AB \| A_1B_1$ pa je $BA \| B_1A_1$ odnosno $b : b_1 = a : a_1$.

(b) Kako je $a : a_1 = b : b_1$ tada je $AB \| A_1B_1$ pa je $A_1B_1 \| AB$ odnosno $a_1 : a = b_1 : b$.

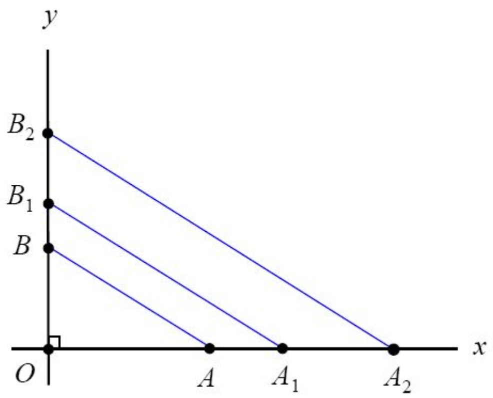
(c) Kako je $a : a_1 = b : b_1$ tada je $AB \| A_1B_1$ pa je $B_1A_1 \| BA$ odnosno $b_1 : b = a_1 : a$.

□

Teorema 3.3

Ako je $a : a_1 = b : b_1$ i $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, tada je $a : a_2 = b : b_2$.

Dokaz. Kako je $a : a_1 = b : b_1$ tada je $AB \| A_1B_1$ i kako je $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ tada je $A_1B_1 \| A_2B_2$. Budući da je relacija "*je paralelna*" tranzitivna, tada je $AB \| A_2B_2$, odnosno $a : a_2 = b : b_2$.

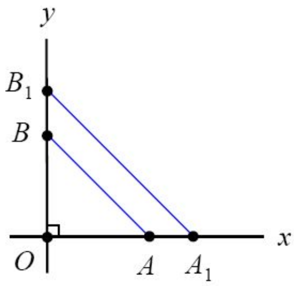


□

Teorema 3.4

Ako je $a = b$ i $a_1 = b_1$, tada je $a : a_1 = b : b_1$.

Dokaz. Kako su $a = b$ i $a_1 = b_1$, tada su $\triangle OAB$ i $\triangle OA_1B_1$ jednakokraki.

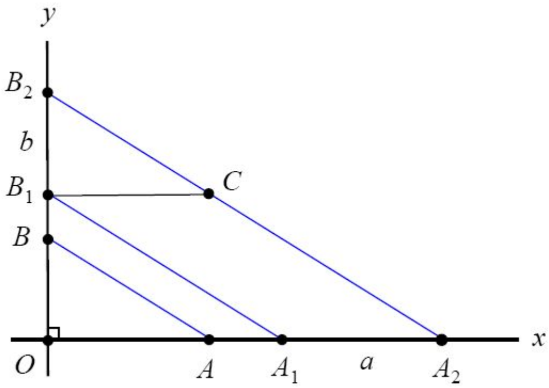


Zbog toga je $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OA_1B_1 = 45°$ pa na osnovu Teoreme 1.17 vrijedi $AB \| A_1B_1$. Dakle, $a : a_1 = b : b_1$. $\square$

Teorema 3.5

Ako je $a : a_1 = b : b_1$, tada je i $(a + a_1) : a_1 = (b + b_1) : b_1$.

Dokaz. Posmatrajmo sliku i neka je $OA = a$, $OA_1 = a_1$, $OB = b$ i $OB_1 = b_1$. Budući da je $a : a_1 = b : b_1$, tada je $AB \| A_1B_1$.

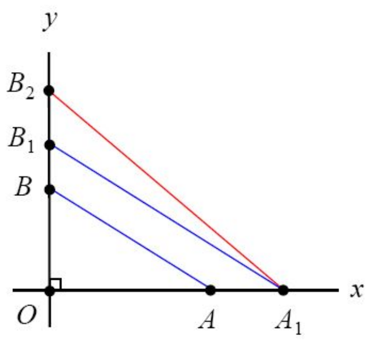


Na pravoj x odaberimo tačku A_2 takvu da je $A_1A_2 = a$ i konstruišimo pravu koja sadrži tačku A_2 a koja je paralelna sa A_1B_1. Neka je presjek te prave i prave y tačka B_2 pa je tada $A_1B_1 \| A_2B_2$. Konstruišimo pravu koja sadrži tačku B_1 a koja je paralelna sa pravom x. Presjek te prave sa A_2B_2 označimo sa C tj. $B_1C \| x$. Tada je $\square A_1A_2B_1B_2$ je paralelogram pa je $B_1C = a$. Zbog toga je $\triangle B_1CB_2 \cong \triangle OAB$ pa je $B_1B_2 = OB = b$. Kako je $A_1B_1 \| A_2B_2$ tada je $(a + a_1) : a_1 = (b + b_1) : b_1$. $\square$

Teorema 3.6

Ako je $a : a_1 = b : b_1$ i $a : a_1 = b : b_2$, tada je $b_1 = b_2$.

Dokaz. Posmatrajmo sliku i neka je $OA = a$, $OA_1 = a_1$, $OB = b$, $OB_1 = b_1$ i $OB_2 = b_2$.

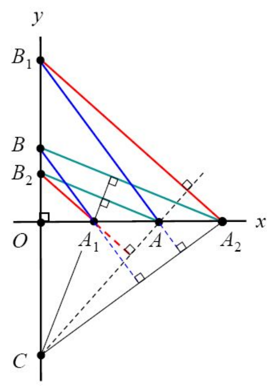


Kako je $a : a_1 = b : b_1$ i $a : a_1 = b : b_2$, tada je $A_1B_1 \| AB$ i $A_1B_2 \| AB$. Tada je $A_1B_1 \equiv A_1B_2$ na osnovu V_E jer kroz tačku A_1 prolazi samo jedna prava koja je paralelna sa AB, odakle je $B_1 \equiv B_2$ tj. $b_1 \equiv b_2$. □

Teorema 3.7: (Pascalova teorema)

Posmatrajmo pravi ugao $\sphericalangle xOy$. Neka su A, A_1, A_2 tačke kraka x i B, B_1, B_2 tačke kraka y, takve da je $AB_1 \| A_1B$ i $AB_2 \| A_2B$. tada je $A_1B_2 \| A_2B_1$.

Dokaz. Posmatrajmo sliku sa navedenim elementima.



Konstruišimo pravu AC takvu da je

$$AC \perp A_1B_2. \tag{3.1}$$

Kako je $AC \perp A_1B_2$ i $OA \perp CB_2$ tada je tačka A_1 ortocentar $\triangle CAB_2$. Kako je $AB_2 \| A_2B$ tada je $CA_1 \perp A_2B$. Kako je $CA_1 \perp A_2B$ i $OA_2 \perp BC$ tada je tačka A_1 ortocentar $\triangle CA_2B$ pa je $BA_1 \perp CA_2$. Budući da je $AB_1 \| A_1B$ tada je $B_1A \perp CA_2$. Zbog toga je tačka A ortocentar $\triangle CA_2B_1$ odakle je

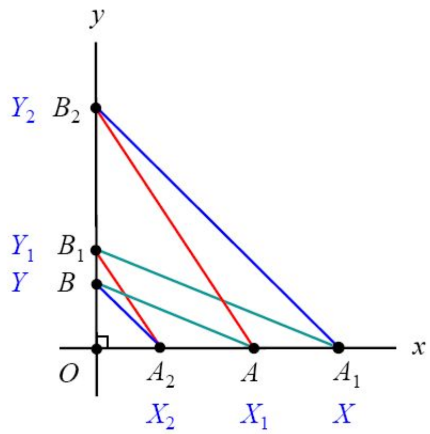
$$AC \perp A_2B_1. \tag{3.2}$$

Na osnovu (3.1) i (3.2) vrijedi $A_1B_2 \| A_2B_1$. $\square$

Teorema 3.8

Ako je $a : a_1 = b : b_1$, tada je $a : b = a_1 : b_1$.

Dokaz. Posmatrajmo sliku i neka je $OA = a$, $OA_1 = a_1$, $OB = b$ i $OB_1 = b_1$.



Tada je

$$AB \| A_1B_1. \tag{3.3}$$

Na pravoj x odaberimo tačku A_2 takvu da je $OA_2 = OB = b$ i na pravoj y odaberimo tačku B_2 takvu da je $OB_2 = OA_1 = a_1$. Tada je, na osnovu Teoreme 3.4,

$$A_2B \| A_1B_2. \tag{3.4}$$

Preimenujmo tačke na sljedeći način

$$A \leftrightarrow X_1,\ A_1 \leftrightarrow X,\ A_2 \leftrightarrow X_2,$$

$$B \leftrightarrow Y,\ B_1 \leftrightarrow Y_1,\ B_2 \leftrightarrow Y_2.$$

Sada, iz (3.3) imamo $XY_1 \| X_1Y$ a iz (3.4) imamo $XY_2 \| X_2Y$, pa na osnovu Teorme 3.7, vrijedi $X_1Y_2 \| X_2Y_1$, tj. $AB_2 \| A_2B_1$. Dakle, $a : b = a_1 : b_1$. $\square$

Označimo sa $m(a)$ mjerni broj dužine duži a.

Teorema 3.9

Vrijedi $a : a_1 = b : b_1 \Leftrightarrow m(a) : m(a_1) = m(b) : m(b_1)$.

Teorema 3.10

Neka su a, b i s koplanarne prave takve da prava s siječe prave a i b. Neka su A_1, A_2, A_3 i A_4 tačke prave a. Ako su B_1, B_2, B_3 i B_4 projekcije tačaka A_1, A_2, A_3 i A_4 na pravu b u pravcu s, tada je

$$m(A_1A_2) : m(A_3A_4) = m(B_1B_2) : m(B_3B_4)$$

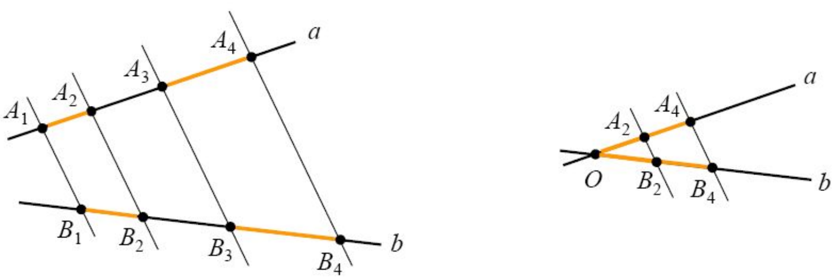
i

$$A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4.$$

Teorema 3.11: (Talesova teorema)

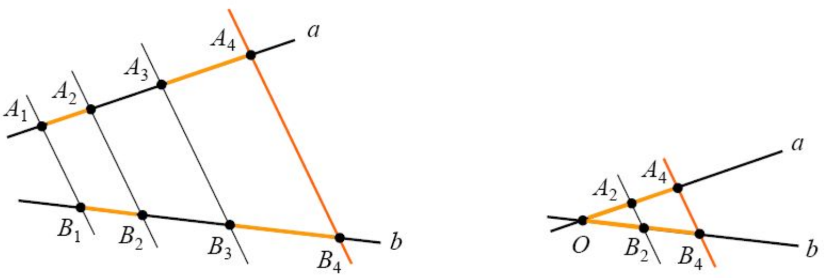
Neka su A_1, A_2, A_3 i A_4 tačke prave a i neka su B_1, B_2, B_3 i B_4 tačke prave b takve da je $A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$. Tada je

$$A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4.$$



Teorema 3.12: (Teorema obrnuta Talesovoj teoremi)

Neka su A_1, A_2, A_3 i A_4 tačke prave a i neka su B_1, B_2, B_3 i B_4 tačke prave b takve da je $A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3$ i $A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4$. Tada je $A_4B_4 \| A_3B_3$.

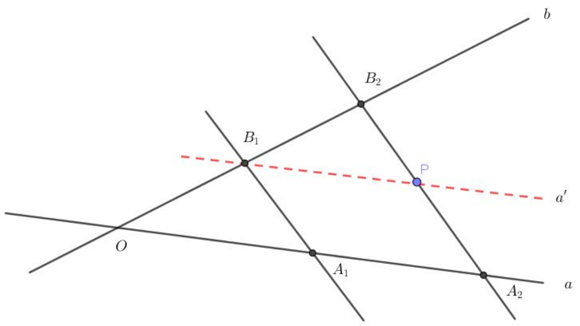


Teorema 3.13

Neka su A_1 i A_2 tačke prave a i neka su B_1 i B_2 tačke prave b takve da je $A_1B_1 \| A_2B_2$. Ako se prave a i b sijeku u tački O, tada je

$$OA_1 : OA_2 = OB_1 : OB_2 = A_1B_1 : A_2B_2. \tag{3.5}$$

Dokaz. Posmatrajmo sliku.



Budući da je $A_1B_1 \| A_2B_2$, primjenom Talesove teoreme dobijamo

$$OA_1 : OA_2 = OB_1 : OB_2. \tag{3.6}$$

Konstruišimo pravu a' koja sadrži tačku B_1 a koja je paralelna sa pravom a i sa P označimo tačku presjeka sa A_2B_2. Tada je četverougao $A_1A_2PB_1$ je paralelogram pa je $A_1B_1 = A_2P$. Primjenom Talesove teoreme pri čemu je $a \| a'$ dobijamo $B_2O : B_2B_1 = B_2P : B_2A_2$ odnosno $OB_2 : B_1B_2 = B_2A_2 : B_2P$. Dalje je

$$OB_2 : (OB_2 - OB_1) = A_2B_2 : (A_2B_2 - A_2P) = A_2B_2 : (A_2B_2 - A_1B_1)$$

pa na osnovu osobina proporcija dobijamo

$$OB_2 : OB_1 = A_2B_2 : A_1B_1. \tag{3.7}$$

Iz (3.6) i (3.7) dobijamo (3.5). □

3.2 Sličnost trouglova

Definicija 3.14

Za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su slični, i pišemo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, akko vriejdi $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$.

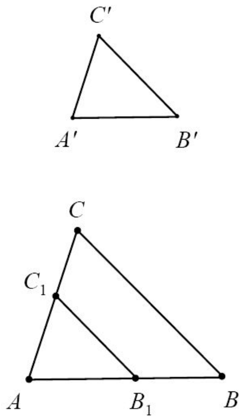
Teorema 3.15

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ akko:

(a) $AB : A'B' = AC : A'C'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$;

(b) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

Dokaz. (a) ($\Leftarrow$) Neka je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Tada je $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$. Odaberimo na stranici AB tačku B_1 takvu da je $AB_1 = A'B'$ i konstruišimo B_1C_1 takvu da je $B_1C_1 \| BC$. tada je na onsovu Talesove teoreme $AB : AB_1 = AC : AC_1 = BC : B_1C_1$, tj. $AB : A'B' = AC : AC_1 = BC : B_1C_1$. S druge strane, kako je $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$ onda je $AC_1 = A'C'$, $B_1C_1 = B'C'$. Dakle, $AB_1 = A'B'$, $AC_1 = A'C'$, $B_1C_1 = B'C'$ pa je $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle A'B'C'$ na osnovu pravila SSS. Dalje je $\sphericalangle A = \sphericalangle B_1AC_1 = \sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle A'$ što je i trebalo dokazati.



($\Rightarrow$) Neka je $AB : A'B' = AC : A'C'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$. Odaberimo tačke $B_1 \in AB$ i $C_1 \in AC$ tako da je $AB_! = A'B'$, $AC_1 = A'C'$. Na osnovu pravila SUS vrijdi $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$ i još na osnovu teorme obrnute Talesovoj teoremi je $BC \| B_1C_1$. Dalje je $AB : AB_1 = AC : AC_1 = BC : B_1C_1$ pa je $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$ što znači da je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

(b) Sami.

□

3.3 Transformacije sličnosti u ravni

Neka je α ravan.

Definicija 3.16

Bijektivno preslikavanje $\omega : \alpha \to \alpha$ se zove transformacija sličnosti u ravni ako za sve tačke $A, B \in \alpha$ za koje je $\omega(A) = A'$ i $\omega(B) = B'$ vrijedi $A'B' : AB = \lambda = \text{const}$, pri čemu se $\lambda \in \mathbb{R}^+$ zove koeficijent sličnosti.

Teorema 3.17

Ako je ω transformacija sličnosti sa koeficijentom λ, tada je ω^{-1} transformacija sličnosti sa koeficijentom λ^{-1}.

Teorema 3.18

Ako su ω_1 i ω_2 transformacije sličnosti sa koeficijentima λ_1 i λ_2, tada su $\omega_1 \cdot \omega_2$ i $\omega_2 \cdot \omega_1$ transformacije sličnosti sa koeficijentom $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. U opštem slučaju je $\omega_1 \cdot \omega_2 \neq \omega_2 \cdot \omega_1$.

Teorema 3.19

Sve sličnosti u ravni obrazuju grupu (nekomutativnu) s obzirom na kompoziciju.

Teorema 3.20

Ako je ω transformacija sličnosti sa koeficijenom $\lambda = 1$ tada je ω transformacija podudarnosti.

Teorema 3.21

Ako transformacija sličnosti ω ima dvije fiksne tačke, tada je ω transformacija podudarnosti.

Dokaz. Neka je $\omega(A) = A$ i $\omega(B) = B$. Tada je $\lambda = A'B' : AB = AB : AB = 1$ pa na osnovu Teoreme 3.20 transfomracija ω podudarnost. □

Teorema 3.22

Ako je ω sličnost sa koeficijentom λ, tada ω preslikava:

(a) pravu na pravu (i čuva kolinearnost tačaka tj. $A - B - C \Rightarrow A' - B' - C'$);

(b) polupravu na polupravu;

(c) duž na duž i pri tome je $A'B' = \lambda \cdot AB$;

(d) ugao na podudaran ugao;

(e) trougao na sličan trougao;

(f) poluravan na poluravan;

(g) kružnicu na kružnicu (pri tome je $r' = \lambda \cdot r$).

3.3.1 Homotetija

Neka je O neka fiksna tačka prostora i $k \neq 0$ zadani realni broj.

Definicija 3.23

Transformacija koja tački X prostora pridružuje tačku X' takvu da je

$$\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX} \tag{3.8}$$

naziva se *homotetija*.

Tačka O se naziva centar homotetije a broj k koeficijent homotetije. Homotetiju ćemo označavati sa h_O^k.

Ako je $O \in \alpha$ transformacija koja tački $X \in \alpha$ pridružuje tačku $X' \in \alpha$ tako da je zadovoljen uslov (3.8) naziva se *homotetija u ravni.*

Tačka $X' = h_O^k(X)$ je uslovom (3.8) jednoznačno određena. Ako je $k > 0$ tačke X i X' se nalaze sa iste strane tačke O. Ako je $k < 0$ tačke X i X' se nalaze sa različitih strana tačke O.

Homotetija je bijektivno preslikavanje prosotra na samog sebe. Ako je $k \neq 1$, centar homotetije je jedina fiksna tačka tog preslikavanja.

Teorema 3.24

Homotetija ima sljedeće osobine:

(a) $h_O^1 = i$;

(b) $h_O^{-1} = \sigma_0$ (u ravni);

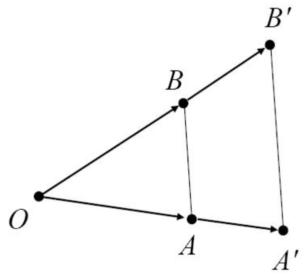
(c) $h_O^{-1} = \Sigma_0$ (u prostoru);

(d) $(h_O^1)^{-1} = h_O^{\frac{1}{k}}$.

Teorema 3.25

Homotetija je sličnost.

Dokaz. Posmatrajmo homotetiju h_O^k i neka je $h_O^k(A) = A'$ i $h_O^k(B) = B'$. Tada je, na osnovu (3.8), $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$.



Odavdje je

$$OA' : OA = OB' : OB = |k|$$

a onda je

$$OA' : OA = OB' : OB = A'B' : AB = |k|$$

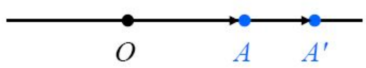
što implicira $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. □

Teorema 3.26

Homotetija preslikava pravu na paralelnu pravu.

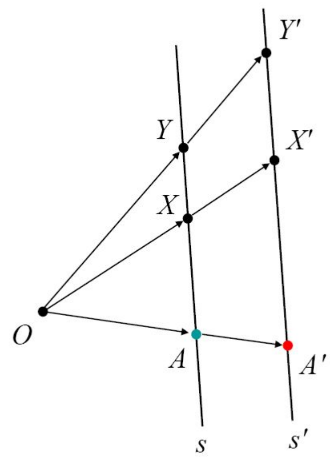
Dokaz. Posmatrajmo homotetiju h_O^k i pravu s. Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

(a) Neka $O \in s$. Tada je $h_O^k(s) = s$ pa je $s \| s$.



(b) Neka $O \notin s$. Odaberimo dvije tačke $A, X \in s$. Tada je $h_O^k(A) = A'$ i $h_O^k(X) = X'$ i vrijedi $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$. Tačke A' i X' određuju novu pravu s' takvu da je $s' \| s$.

Neka je sada $Y \in s$ proizvoljna tačka i neka je $h_O^k(Y) = Y'$. Ako sada, kao maloprije, posmatramo tačke $A, Y \in s$, tada će tačke A' i Y' određivati neku pravu s'' takvu da je $s'' \| s$. kako je $s', s'' \| s$ i $A' \in s', s''$, tada na osnovu V_E vrijedi $s' \equiv s$.



$\square$

Teorema 3.27

Homotetija preslikava ravan na paralelnu ravan. Ravan koja sadrži centar homotetije preslikava se na samu sebe.

Dokaz. Posmatrajmo homotetiju h_O^k i ravan α. Ako je $O \in \alpha$, tada je na osnovu definicije $h_O^k(\alpha) = \alpha$.

Neka $O \notin \alpha$. Uočimo dvije prave $a, b \in \alpha$ takve da je $a \cap b = \{P\}$. Neka je $h_O^k(a) = a'$ i $h_O^k(b) = b'$. Tada, na osnovu Teoreme 3.26, vrijedi $a' \| a$ i $b' \| b$.

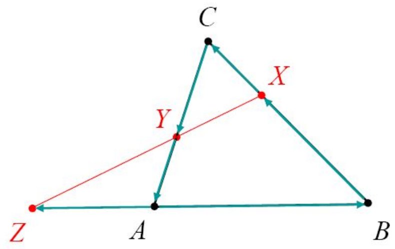
Kako homotetija održava kolinearnost tačaka to je $P' = h_O^k(P)$ te $P' \in a'$, $P' \in b'$ i $P' = a' \cap b'$.

Prave a' i b' određuju ravan α' i $\alpha' \| \alpha$. Dokazat ćemo da sa svaku tačku $C \in \alpha$ vrijedi $C' = h_O^k(C) \in \alpha'$. Neka je $A \in a$. Tada postoji tačka $\{B\} = p(A, C) \cap b$ te $A' = h_O^k(A) \in a'$ i $B' = h_O^k(B) \in b'$. To znači da $p(A', B') \in \alpha'$. S druge strane, $h_O^k(p(A, B)) = p(A', B')$ te kako $C \in p(A, B)$ to je $h_O^k(C) = C' \in p(A', B')$, tj. $C' \in \alpha'$. Dakle, $h_O^k(\alpha) = \alpha'$ i $\alpha' \| \alpha$. $\square$

Teorema 3.28: (Teorema Menelaja)

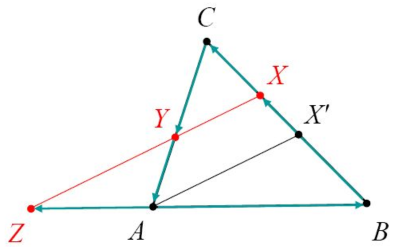
Dati su $\triangle ABC$ i tačke X, Y, Z redom na pravima BC, CA i AB pri čemu nijedna nije tjeme trougla. Tačke X, Y, Z su kolinearne akko

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -1. \tag{3.9}$$



Dokaz. (⇒)

Neka su tačke X, Y, Z kolinearne. Dokažimo prvo da je $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$. Konstruišimo pravu $AX' \| XYZ$.



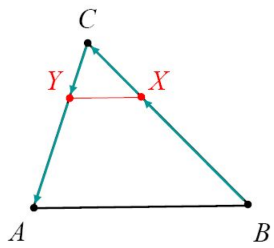
Tada je, prema Talesovoj teoremi, $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{X'X}{XB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CX}{XX'} = 1$. Budući da su vektori $\overrightarrow{AZ}$ i $\overrightarrow{ZB}$ suprotni, dobijamo (3.9).

(⇐) Neka vrijedi (3.9) i pretpostavimo da tačke X, Y, Z nisu kolinearne.

Dokažimo prvo da prava XY siječe pravu AB. U tu svrhu, pretpostavimo da je $XY \| AB$. Tada je, prema Talesovoj teoremi,

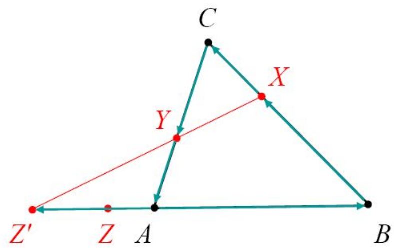
$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{XB}} = \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{XC}}{\overrightarrow{BX}} = 1.$$

Dalje, iz (3.9), dobijamo $\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = -1$ pa je $\overrightarrow{AZ} = -\overrightarrow{ZB}$ tj. $\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZB} = 0$ pa je $\overrightarrow{AB} = 0$ što znači da se tačke A i B poklapaju, što je nemoguće. Dakle, prava XY siječe pravu AB.



Neka je $XY \cap AB = \{Z'\}$ pri čemu je $Z' \neq Z$. Budući da vrijedi (3.9), tada je

$$\frac{\overrightarrow{AZ'}}{\overrightarrow{Z'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -1. \tag{3.10}$$



Iz (3.9) i (3.10) dobijamo

$$\frac{\overrightarrow{AZ'}}{\overrightarrow{Z'B}} = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}$$

odakle je

$$\frac{\overrightarrow{AZ'} + \overrightarrow{Z'B}}{\overrightarrow{Z'B}} = \frac{\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{ZB}}$$

odnosno

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{Z'B}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{ZB}}$$

što znači da se tačke Z i Z' poklapaju, što je nemoguće. Dakle, doista su tačke X, Y, Z kolinearne $\square$

Teorema 3.29

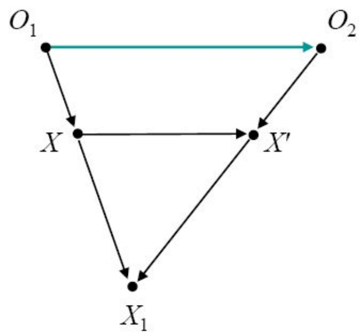
Proizvod dvije homotetije je homotetija ili translacija.

Dokaz. Radi kraćeg zapisa, označimo $h_1 = h_{O_1}^{k_1}$ i $h_2 = h_{O_2}^{k_2}$ i posmatrajmo sljedeće slučajeve:

(a) Neka je $O_1 = O_2 = O$. Ako je $k_1 \cdot k_2 = 1$ tada je $h_2 \cdot h_1 = h_O^{k_1 \cdot k_2} = h_O^1 = i = \tau_{\vec{0}}$, što je translacija. Ako je $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ tada je $h_2 \cdot h_1 = h_O^{k_1 \cdot k_2}$ homotetija.

(b) Neka je $O_1 \neq O_2$.

(i) Neka je $k_1 \cdot k_2 = 1$ i neka je $h_2 \cdot h_1(X) = X'$. Ako je $h_1(X) = X_1$ tada je $\overrightarrow{O_1X_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{O_1X}$ i ako je $h_2(X_1) = X'$ tada je $\overrightarrow{O_2X'} = k_2 \cdot \overrightarrow{O_2X_1}$.

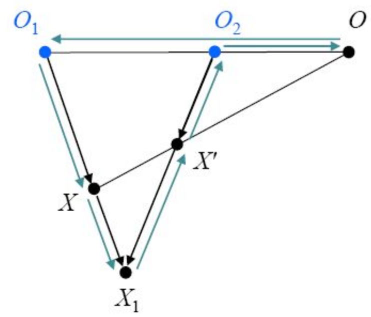


Primijetimo da je na slici raspored tačaka $O_1 - X - X_1$ jer smo odabrali da je $k_1 > 1$, ali je tada $k_2 < 1$ pa je raspored tačaka $X_1 - X' - O_2$. Tada je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{XX'} &= \overrightarrow{XO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2X'} = -\frac{1}{k_1}\overrightarrow{O_1X_1} + \overrightarrow{O_1O_2} - k_2\overrightarrow{X_1O_2} \\
&= -\frac{1}{k_1}\overrightarrow{O_1X_1} + \overrightarrow{O_1O_2} - \frac{1}{k_1}\overrightarrow{X_1O_2} = \overrightarrow{O_1O_2} - \frac{1}{k_1}(\overrightarrow{O_1X_1} + \overrightarrow{X_1O_2}) \\
&= \overrightarrow{O_1O_2} - \frac{1}{k_1}(\overrightarrow{O_1O_2}) = \frac{k_1 - 1}{k_1}\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{v} = \text{const}
\end{aligned}$$

jer su O_1 i O_2 dvije fiksne tačke, pa je vektor $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{v}$ konstantan. Dakle $h_2 \cdot h_1 = \tau_{\vec{v}}$.

(ii) Neka je $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ i neka je $h_2 \cdot h_1(X) = X'$. Ako je $h_1(X) = X_1$ tada je $\overrightarrow{O_1X_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{O_1X}$ i ako je $h_2(X_1) = X'$ tada je $\overrightarrow{O_2X'} = k_2 \cdot \overrightarrow{O_2X_1}$. Budući da je $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, tada $XX' \nparallel O_1O_2$. Neka je $XX' \cap O_1O_2 = \{O\}$.



Pokažimo da je tačka O fiksna tačka. Posmatrajmo $\triangle O_1X_1O_2$ i pravu $XX'O$. Tada je na osnovu Menelajeve teoreme

$$\frac{\overrightarrow{O_1X}}{\overrightarrow{XX_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{X_1X'}}{\overrightarrow{X'O_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{O_2O}}{\overrightarrow{OO_1}} = -1 \tag{3.11}$$

Dalje je

$$\frac{\overrightarrow{O_1X}}{\overrightarrow{XX_1}} = \frac{\overrightarrow{O_1X}}{\overrightarrow{XO_1} + \overrightarrow{O_1X_1}} = \frac{1}{\frac{\overrightarrow{XO_1}}{\overrightarrow{O_1X}} + \frac{\overrightarrow{O_1X_1}}{\overrightarrow{O_1X}}} = \frac{1}{k_1 - 1}$$

i

$$\frac{\overrightarrow{X_1X'}}{\overrightarrow{X'O_2}} = \frac{\overrightarrow{X_1O_2} + \overrightarrow{O_2X'}}{\overrightarrow{X'O_2}} = \frac{\overrightarrow{X_1O_2}}{\overrightarrow{X'O_2}} + \frac{\overrightarrow{O_2X'}}{\overrightarrow{X'O_2}} = \frac{1-k_2}{k_2}.$$

Uvrštavanjem u (3.11), dobijamo

$$\frac{1}{k_1 - 1} \cdot \frac{1-k_2}{k_2} \cdot \frac{\overrightarrow{O_2O}}{\overrightarrow{OO_1}} = -1$$

odakle je

$$\frac{\overrightarrow{O_2O}}{\overrightarrow{OO_1}} = \frac{k_1k_2 - k_2}{k_2 - 1}.$$

Dalje je

$$\frac{\overrightarrow{O_2O}}{\overrightarrow{OO_1}} = \frac{\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O}}{\overrightarrow{OO_1}} = \frac{\overrightarrow{O_2O_1}}{\overrightarrow{OO_1}} - 1 = \frac{k_1k_2 - k_2}{k_2 - 1}$$

odakle je

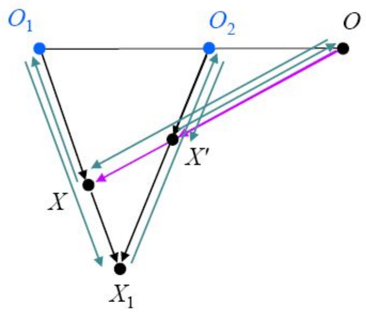
$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{k_2 - 1}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2} = \text{const.}$$

Dakle, tačka O je fiksna tačka prelikavanja.

Pokažimo sada da je $\overrightarrow{OX'} = k_1k_2\overrightarrow{OX}$. Posmatrajmo $\triangle XX_1X'$ i pravu O_1O_2O. Tada je

$$\frac{\overrightarrow{XO_1}}{\overrightarrow{O_1X_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{X_1O_2}}{\overrightarrow{O_2X'}} \cdot \frac{\overrightarrow{X'O}}{\overrightarrow{OX}} = -1. \tag{3.12}$$

Kako je $\frac{\overrightarrow{XO_1}}{\overrightarrow{O_1X_1}} = -\frac{1}{k_1}$ i $\frac{\overrightarrow{X_1O_2}}{\overrightarrow{O_2X'}} = -\frac{1}{k_2}$, tada iz (3.12) dobijamo $\frac{\overrightarrow{X'O}}{\overrightarrow{OX}} = -k_1k_2$ pa je $\overrightarrow{OX'} = k_1k_2\overrightarrow{OX}$.



Dakle $h_{O_2}^{k_2} \cdot h_{O_1}^{k_1} = h_O^{k_1 \cdot k_2}$, $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ pri čemu je $\overrightarrow{OO_1} = \frac{k_2 - 1}{1 - k_1 \cdot k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$.

□

Posljedica 3.30. *Proizvod homotettije i translacije je homotetija.*

Dokaz. Vrijedi

$$h_O^k \cdot \tau_{\overrightarrow{v}} = h_O^k \cdot \sigma_B \cdot \sigma_A,$$

pri čemu je $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AB}$. Dalje je

$$h_O^k \cdot \tau_{\overrightarrow{v}} = h_O^k \cdot \sigma_B \cdot \sigma_A = h_O^k \cdot h_B^{-1} \cdot h_A^{-1},$$

jer je $\sigma_A = h_A^{-1}$. Na osnovu Teoreme 3.29 sada vrijedi

$$h_O^k \cdot \tau_{\overrightarrow{v}} = h_O^k \cdot \sigma_B \cdot \sigma_A = h_C^{-k} \cdot h_A^{-1},$$

pri čemu su tačke O, B, C kolinearne, te ponovo na osnovu Teoreme 3.29 vrijedi

$$h_O^k \cdot \tau_{\overrightarrow{v}} = h_O^k \cdot \sigma_B \cdot \sigma_A = h_D^k,$$

pri čemu su tačke C, A, D kolinearne. □

3.3.2 Klasifikacija sličnosti u ravni

Teorema 3.31

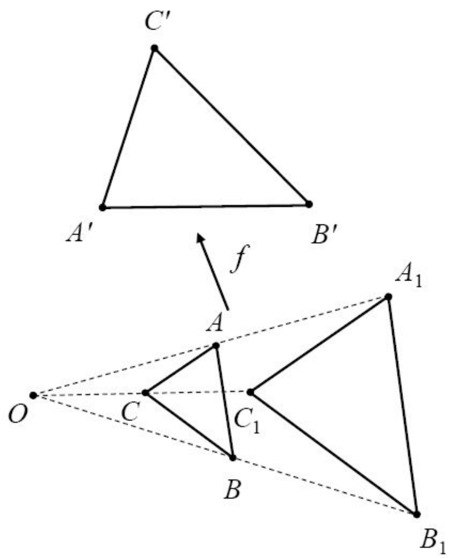
Ako za sličnosti ω i ω_1 vrijedi $\omega(A) = \omega_1(A)$, $\omega(B) = \omega_1(B)$ i $\omega(C) = \omega_1(C)$, pri čemu su A, B, C tri nekolinearne tačke, tada je $\omega = \omega_1$, odnosno $\omega(X) = \omega_1(X)$ za svaku tačku X.

Dokaz. Iz $\omega(A) = \omega_1(A)$, $\omega(B) = \omega_1(B)$ i $\omega(C) = \omega_1(C)$, dobijamo $\omega_1^{-1}\omega(A) = A$, $\omega_1^{-1}\omega(B) = B$ i $\omega_1^{-1}\omega(C) = C$ pa na osnovu Teoreme 3.21 vrijedi da je $\omega_1^{-1}\omega$ podudarnost. Dakle, $\omega_1^{-1}\omega = i$, odakle zaključujemo da je $\omega_1^{-1} = \omega$. □

Teorema 3.32

Svaka sličnost može da se predstavi kao proizvod jedne homotetije i jedne podudarnosti, odnosno jedne podudarnosti i jedne homotetije.

Dokaz. Neka je ω sličnost sa koeficijentom λ i neka je $\omega(A) = A'$, $\omega(B) = B'$ i $\omega(C) = C'$. Posmatrajmo homotetiju h_O^λ takva da je $h_O^\lambda(A) = A_1$, $h_O^\lambda(B) = B_1$ i $h_O^\lambda(C) = C_1$. Tada je na osnovu pravila SSS $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A'B'C'$. Prema tome postoji podudarnost f takva da je $f(A_1) = A'$, $f(B_1) = B'$ i $f(B_1) = B'$.



Odavdje dobijamo $f \cdot h_O^\lambda(A) = A'$, $f \cdot h_O^\lambda(B) = B'$ i $f \cdot h_O^\lambda(B) = B'$. Pošto je transformacija sličnosti koja preslikava $\triangle ABC$ u sličan trougao jjedinstven, tada je $\omega = f \cdot h_O^\lambda$.

Na isti način dokazujemo da je $\omega = h_O^\lambda \cdot f$. $\square$

Definicija 3.33

Transformacija sličnosti koja je proizvod homotetije i podudarnosti prve vrste naziva se transformacija sličnosti prve vrste.

Definicija 3.34

Transformacija sličnosti koja je proizvod homotetije i podudarnosti druge vrste naziva se transformacija sličnosti druge vrste.

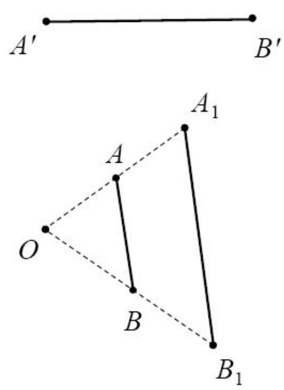
Definicija 3.35

Transformacija sličnosti čiji je koeficijent sličnosti $\lambda \neq 1$ naziva se netrivijalna sličnost.

Teorema 3.36

Za svaka dva para tačaka A, B i A', B' za koje vrijedi da nije $AB \cong A'B'$ postoje tačno dvije sličnosti ω i ω_1 takve da je $\omega(A) = \omega_1(A) = A'$ i $\omega(B) = \omega_1(B) = B'$. Jedna je sličnost prve vrste a druga je sličnost druge vrste.

Dokaz. Neka je $A'B' = \lambda AB$. Posmatrajmo homotetiju h_O^λ i neka je $h_O^\lambda(A) = A_1$ i $h_O^\lambda(B) = B_1$. Tada je $A_1B_1 = \lambda AB = A'B'$. Tada postoji podudarnost f za koju vrijedi $f(A_1) = A'$ i $f(B_1) = B'$. Dakle, $\omega = f \cdot h_O^\lambda(A) = A'$ i $\omega = f \cdot h_O^\lambda(B) = B'$



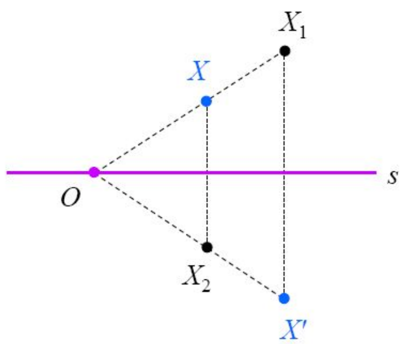
Pretpostavimo da je $\omega_1(A) = A'$, $\omega_1(B) = B'$ i $\omega \neq \omega_1$. Tada je $\omega_1 \cdot \omega^{-1}(A') = A'$ i $\omega_1 \cdot \omega^{-1}(B') = B'$ pa je na osnovu Teoreme 3.20 preslikavanje $g = \omega_1 \cdot \omega^{-1}$ podudarnost te vrijedi $g(A') = A'$ i $g(B') = B'$. Sada zaključujemo da je preslikavanje g identičko preslikavanje i ili je osna simetrija $\sigma_{A'B'}$. Kako je $\omega \neq \omega_1$, tada je $g = \sigma_{A'B'}$, pa je $\omega_1 = g \cdot \omega = \sigma_{A'B'} \cdot f \cdot h_O^{\lambda}$.

Ako je preslikavanje f podudarnost prve vrste tada je preslikavanje $g = \sigma_{A'B'} \cdot f$ podudarnost druge vrste i ako je preslikavanje f podudarnost druge vrste tada je preslikavanje $g = \sigma_{A'B'} \cdot f$ podudarnost prve vrste.

Dakle, doista je jedna sličnost prve vrste a druga sličnost druge vrste. □

Definicija 3.37

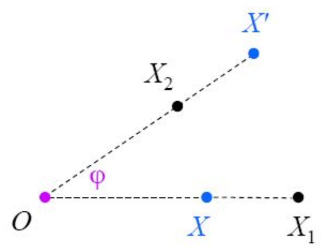
Proizvod osne simetrije i homotetije $\sigma_s \cdot h_O^k$ čije središte pripada osi simetrije $O \in s$ naziva se centralno-slična simetrija.



Vrijedi $\sigma_s \cdot h_O^k = h_O^k \cdot \sigma_s$.

Definicija 3.38

Proizvod rotacije i homotetije $\rho_O^{\varphi} \cdot h_O^k$ sa istim središtem naziva se centralno-slična rotacija.



Vrijedi $\rho_O^{\varphi} \cdot h_O^k = h_O^k \cdot \rho_O^{\varphi}$.

Teorema 3.39

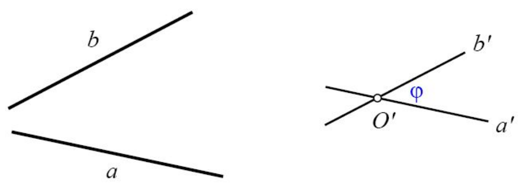
Svaka sličnost druge vrste je centralno-slična simetrija.

Poglavlje 4

Figure u prostoru

4.1 Ugao između mimoilaznih pravih

Mimoilazne prave i njihovo označavanje su ranije definisani u Definiciji 1.14. Ugao između mimolizanih pravih a i b je ugao između pravih a' i b' koje se sijeku ali takve da je $a' \| a$ i $b' \| b$. Jasno je da takve prave a' i b' u prostoru nisu jedinstvene.



Teorema 4.1

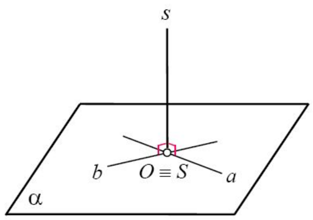
Prava s je normalna na ravan α ako je siječe i normalna je na dvije prave ravni α koje se sijeku.

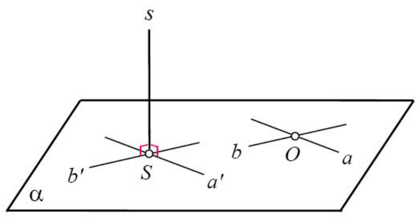
Dokaz. Neka je $s \cap \alpha = \{S\}$ i neka je $s \perp a$ i $s \perp b$, pri čemu su $a, b \in \alpha$. Neka je $a \cap b = \{O\}$.

Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

(a) Neka je $O \equiv S$. Tada je tvrđenje teoreme jasno, jer je prava s okomita na dvije prave u ravni.

(b) Neka $O \neq S$. Posmatrajmo tada dvije prave a' i b' koje sadrže tačku S takve da su $a' \| a$ i $b'\ b$. Budući da je $s \perp a$ i $s \perp b$, tada je $s \perp a'$ i $s \perp b'$.





□

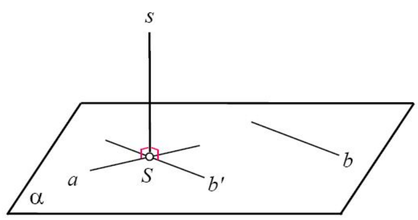
Teorema 4.2

Ako je prava s normalna na ravan α, tada je normalna na svaku pravu ravni α.

Dokaz. Neka je $s \perp \alpha$ i $s \cap \alpha = \{S\}$. Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

(a) Posmatrajmo pravu $a \in \alpha$ takvu da $S \in a$.Ttada je $s \perp a$.

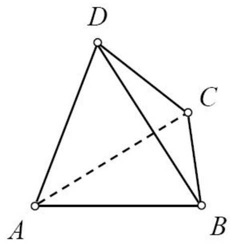
(b) Posmatrajmo pravu $b \in \alpha$ takvu da $S \not b$ i pravu b' koja sadrži tačku S takvu da je $b' \| b$. Tada je $s \perp b'$ pa je $s \perp b$-



□

4.2 Tetraedar

Tetraedar je geometrijsko tijelo koga ograničavaju četiri trougaone površi, koje zajedno sa dijelom prostora koga omeđuju jednoznačno formiraju tijelo sa četiri tjemena i šest ivica. Naziv se u principu koristi za pravilni tetraedar, kod koga su ove četiri površi identični jednakostranični trouglovi. Pravilni tetraedar je jedan od pet pravilnih poliedara.

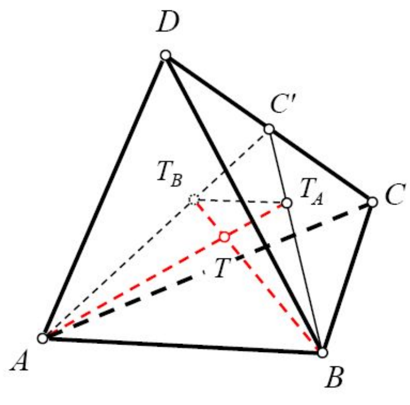


Tačke A, B, C, D se nazivaju tjemena (vrhovi) tetraedra, duži AB, AC, AD, BC, BD, CD se nazivaju ivice tetraedra a trouglovi ABC, ABD, ACD i BCD se nazivaju strane tetraedra. Uglovi $\sphericalangle BAC$,$\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle CAD$ se nazivaju ivični uglovi kod tjemena A. Slično definišemo ivične uglove kod tjemena B, C i D.

Teorema 4.3

Duži koje spajaju tjemena tetraedra sa težištima naspramnih strana sijku se u jednoj tački koja svaku od njih dijeli u odnosu 3 : 1 računajući od tjemena.

Dokaz. Označimo sa T_A težište $\triangle BCD$ i sa T_B težište $\triangle ACD$. Neka je $AT_B \cap AT_A = \{C'\}$ i gdje je C' središte duži CD.



Tada je, prema poznatoj osobini trougla, $AC' : T_BC' = 3 : 1$ i $BC' : T_AC' = 3 : 1$, tojest $AC' : T_BC' = BC' : T_AC'$. Tada, prema Teoremi 3.12, vrijedi

$AB \| T_A T_B$. Dalje je također $AB : T_A T_B = AC' : T_B C' = BC' : T_A C' = 3 : 1$. Neka je $AT_A \cap BT_B = \{T\}$. Tada je na osnovu pravila UUU $\triangle ABT \sim \triangle TT_A T_B$. Zato je

$$AT : TT_A = BT : TT_B = AB : T_A T_B = 3 : 1. \tag{4.1}$$

Posmatrajmo sada težišnice AT_A i CT_C i neka je $AT_A \cap CT_C = \{T'\}$. Na sličan način zaključujemo da je

$$AT' : T'T_A = CT' : T'T_C = 3 : 1. \tag{4.2}$$

Posmatrajmo težišnice AT_A i DT_D i neka je $AT_A \cap CT_C = \{T''\}$. Također zaključujemo da je

$$AT'' : T''T_A = DT'' : T''T_D = 3 : 1. \tag{4.3}$$

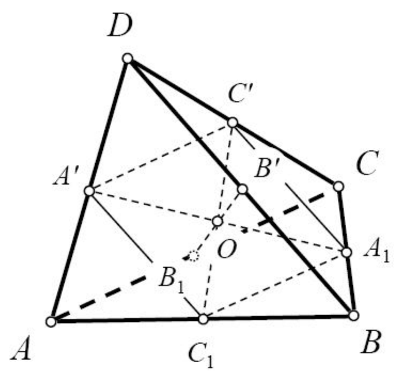
Iz (4.1),(4.2) i (4.3) zajljučujemo da je $T = T' = T''$ i $AT : TT_A = BT : TT_B = CT : TT_C = DT : TT_D = 3 : 1$.

Tačka T se naziva težište tetraedra. □

Teorema 4.4

Duži koje spajaju sredine naspramnih ivica tetraedra sijeku se u jednoj tački koja svaku od njih polovi.

Dokaz. Neka su A_1, B_1, C_1, A', B' i C' sredine stranica BC, CA, AB, AD, BD i CD



Iz $\triangle ABC$ zaključujemo da vrijedi $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$ a iz $\triangle ADC$ zaključujemo da vrijedi $A'C' = \frac{1}{2}AC$. Prema tome $A_1C_1 = AC$. Isto tako zaključujemo da je $A'C_1 = A_1C'$ pa je četverougao $A_1C_1A'C'$ paralelogram. Neka je $C_1C' \cap A_1A' = \{O\}$. Pošto se dijagonale paralelograma polove, tada je tačka O sredina duži C_1C' i A_1A'.

Slično, ako je $C_1C' \cap B_1B' = \{O'\}$, tada je tačka O' sredina duži C_1C' i B_1B'. Kako su tačke O i O' sredine duži C_1C, tada je $O = O'$. Dakle, tačka O je sredina duži A_1A', B_1B' i C_1C'. □

Teorema 4.5

(a) Ako su dvije naspramne ivice tetraedra podudarne, tada su duži određene sredinama druga dva para naspramnih ivica normalne.

(b) Ako su dvije naspramne ivice tetraedra normalne, tada su duži određene sredinama druga dva para naspramnih ivica podudarne.

Dokaz. U dokazu ćemo koristi rezultat iz Teoreme (4.4).

(a) Neka je $AC = BD$. Tada je četverougao $A_1C_1A'C'$ romb, a kako se dijagonale romba polove i međusobno su okomite, tada je $A_1A' \perp C_1C'$.

(b) Neka je $AC \perp BD$. Tada je četverougao $A_1C_1A'C'$ pravougaonik pa je $A_1A' = C_1C'$.

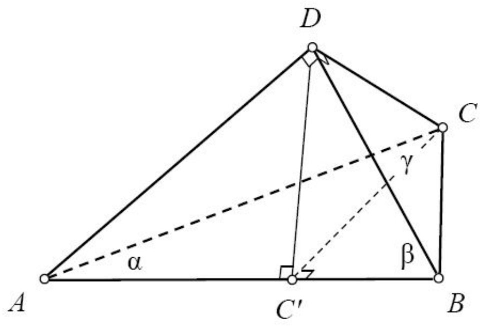
□

Teorema 4.6

Ako su u tetraedru $ABCD$ svi ivični uglovi kod tjemena D pravi, tada je $\triangle ABC$ oštrougli.

Dokaz. Neka su $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90°$. Tada je $CD \perp ABD$. Neka je $DC' \perp AB$. Tada je $A - C'_B$ i na osnovu teoreme o tri normale[1] vriejdi $CC' \perp AB$. Dakle, CC' je visina $\triangle ABC$ pa je $\alpha < 90°$ i $\beta < 90°$. Na sličan način dokazujemo da su $\beta < 90°$ i $\gamma < 90°$. Dakle, $\triangle ABC$ je oštrougli.

[1] Ako je ortogonalna projekcija p' prave p na rava π okomita na neku pravu $q \in \pi$, tada je prava p ortogonalna na pravu q.

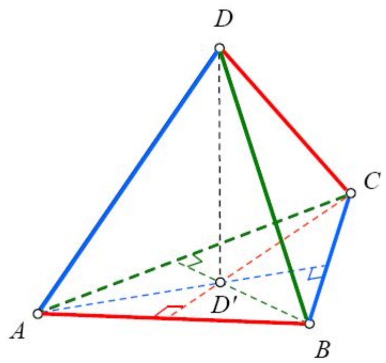


□

Teorema 4.7

Ako u tetraedru $ABCD$ vrijedi $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$, tada je $AD \perp BC$.

Dokaz. Neka je $D' \in ABC$ i $DD' \perp ABC$. Tada je na osnovu Teorme 4.2 $DD' \perp AB$, $DD' \perp AC$ i $DD' \perp BC$.



Kako je $AB \perp CD$ i $AB \perp DD'$, tada je $AB \perp CDD'$ pa je na osnovu Teorme 4.2

$$AB \perp CD'. \tag{4.4}$$

Isto, kako je $AC \perp BD$ i $AC \perp DD'$, tada je $AC \perp BDD'$ pa je na osnovu Teoreme 4.2

$$AC \perp BD'. \tag{4.5}$$

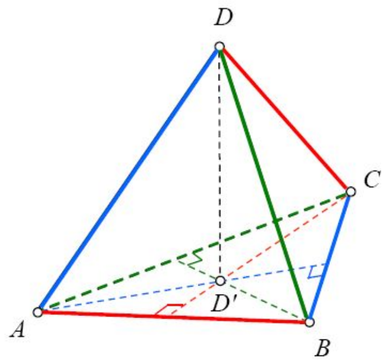
Iz (4.4) i (4.5) zaključujemo da je tačka D' ortocentar $\triangle ABC$ pa je $BC \perp AD'$.

Kako je $BC \perp DD'$ i $BC \perp AD'$, tada je $BC \perp ADD'$ a onda, na osnovu Teoreme 4.2, je i $BC \perp AD$. □

Teorema 4.8

Tetraedar je ortogonalan ako i samo ako je normalna projekcija jednog tjemena na ravan određenu sa preostala tri ortocentar trougla određenog sa ta tri tjemena.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je tetraedar $ABCD$ ortogonalan, tj. $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ i $AD \perp BC$. Neka je D' ortogonalna projekcija tjemena D na ravan ABC.



Kako je $DD' \perp ABC$, onda na osnovu Teoreme 4.2 je $DD' \perp AB$, $DD' \perp BC$ i $DD' \perp AC$.

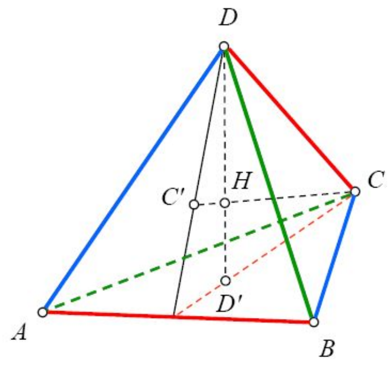
Kako je $AB \perp DD'$ i $AB \perp CD$, tada je na osnovu Teoreme 4.1 $AB \perp CDD'$ i na osnovu Teoreme 4.2 vrijedi $AB \perp CD'$. To znači da je CD' visina $\triangle ABC$. Na sličan način pokazujemo da je AD' visina $\triangle ABC$ i BD' visina $\triangle ABC$. Dakle, tačka D' je ortocentar $\triangle ABC$.

($\Leftarrow$) Neka je D' je ortocentar $\triangle ABC$ i neka je D' ortogonalna projekcija tjemena D na ravan ABC. Kako je $DD' \perp ABC$, onda na osnovu Teoreme 4.2 je $DD' \perp AB$. S druge strane, kako je D' je ortocentar $\triangle ABC$, tada je $CD' \perp AB$. Tada je na osnovu Teoreme 4.1 $AB \perp CDD'$, pa dalje na osnovu Teoreme 4.2 je $AB \perp CD$. Slično pokazujemo da je $AC \perp BD$ i $AD \perp BC$. Dakle, tetraedar $ABCD$ je ortogonalan. $\square$

Teorema 4.9

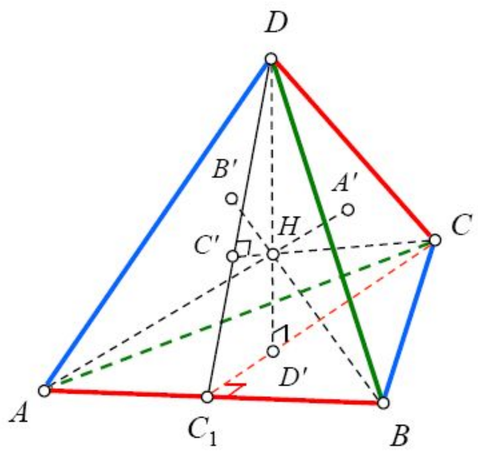
Prave određene visinama tetraedra sijeku se u jednoj tački ako i samo ako je tetraedar ortogonalan.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka su AA', BB', CC' i DD' visine tetraedra $ABCD$ i neka je $AA' \cap BB' \cap CC' \cap DD' = \{H\}$. Posmatrajamo $CC' \cap DD' = \{H\}$.



Kako je $CC' \perp ABD$ i $DD' \perp ABC$ tada je na osnovu Teoreme 4.2 $CC' \perp AB$ i $DD' \perp AB$. Dalje je na osnovu Teoreme 4.1 $AB \perp CDC'D'$ pa na osnovu Teoreme 4.2 je $AB \perp CD$. slično pokazujemo da je $AC \perp BD$ i $AD \perp BC$. Dakle, tetraedar $ABCD$ je ortogonalan.

($\Leftarrow$) Neka je tetraedar $ABCD$ je ortogonalan. To znači da je $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ i $AD \perp BC$. Neka je CC_1 visina $\triangle ABC$.



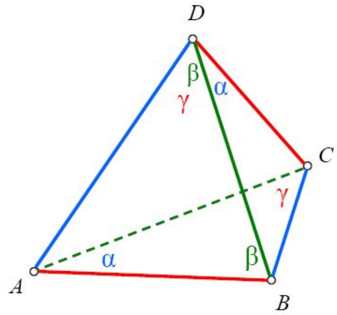
Kako je $CC_1 \perp AB$ i $CD \perp AB$, tada je na osnovu Teoreme 4.1 $AB \perp CC_1D$. Neka su $DD' \perp CC_1$ i $CC' \perp DC_1$ i $DD' \cap CC' = \{H\}$. Tada je H ortocentar $\triangle CC_1D$. Kako je $AB \perp CC_1D$ tada je $DD' \perp AB$. Kako je $DD' \perp CC_1$ i $DD' \perp AB$, tada je na osnovu Teoreme 4.1 $DD' \perp ABC$. Slično pokazujemo da je $CC' \perp ABD$.

Posmatrajmo sada visinu $BB' \perp ACD$ i neka je $BB' \cap DD' = \{H'\}$ i $BB' \cap CC' = \{H''\}$. Visina BB' ne leži u ravni CC_1D. Prema tome $H = H' = H''$ jer je $CC' \cap DD' = \{H\}$. Slično dokazujemo da $H \in AA'$. $\square$

Teorema 4.10

Ako su naspramne ivice tetraedra međusobno podudarne (ravnostrani tetraedar), tada su strane tetraedra međusobno podudarni trouglovi. Zbir ivičnih uglova pri svakom vrhu je 180°.

Dokaz. Neka je $AB = CD$, $AC = BD$ i $AD = BC$. Tada je na osnovu pravila (SSS) $\triangle ABC \cong \triangle CDA \cong \triangle BAD \cong \triangle DCB$.

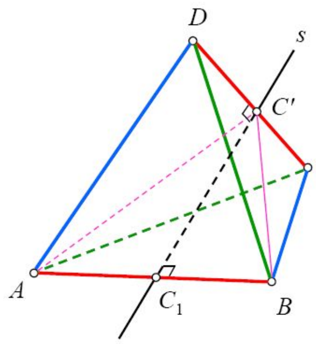


Prema tome $\sphericalangle BDC + \sphericalangle CDA + \sphericalangle ADB = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180°$. □

Teorema 4.11

Ravnostrani tetraedar ima tri ose simetrije.

Dokaz. Neka je $ABCD$ ravnostrani tetraedar, tj. neka je $AB = CD$, $AC = BD$ i $AD = BC$. Označimo sa C_1 sredinu duži AB i sa C' sredinu duži CD. neka je s prava određena sa tačkama C_1 i C'.



Tada je na osnovu pravila (SSS) $\triangle CDA \cong \triangle DCB$ pa je $AC' \cong BC'$, tj. $\triangle ABC'$ je jednakokraki. Dalje je $s \perp p(AB)$ i $s \perp p(CD)$. Zbog toga postoji preslikavanje $\Sigma_s(A) = B$ i $\Sigma_s(C) = D$. dakle, $\Sigma_s(ABCD) = BADC$, tj. prava s je osa simetrije tetraedra $ABCD$. $\square$

4.3 Sfera (lopta)

Definicija 4.12

Sfera je skup tačaka u prostoru jednako udaljenih od neke fiksne tačke.

Sa O ćemo označavati fiksnu tačku prostoru koju ćemo zvati *centar sfere* a sa r fiksnu udaljenost koju ćemo zvati *poluprečnik sfere* i pisat ćemo $L(O;r) = \{X \in P : OX = r\}$. Sa $\mathrm{int}L(O;r)$ ćemo označavati unutrašnjost sfere, tj. $\mathrm{int}L(O;r) = \{X \in P : OX < r\}$ a sa $\mathrm{ext}L(O;r)$ ćemo označavati spoljašnjost sfere, tj. $\mathrm{ext}L(O;r) = \{X \in P : OX > r\}$.

Teorema 4.13

Prava i lopta mogu imati najviše dve zajedničke tačke.

Teorema 4.14

Ako prava s i sfera $L(O;r)$ imaju zajedničku tačku A i pritom $p(O,A) \not\perp s$, tada prava s i sfera $L(O;r)$ imaju još jednu i samo jednu zajedničku tačku.

Teorema 4.15

Neka prava s i sfera $L(O;r)$ imaju zajedničku tačku A. Tada je $s \cap L = \{A\}$ ako i samo ako je $p(O,A) \perp s$.

Teorema 4.16

Ako ravan α i sfera $L(O;r)$ imaju zajedničku tačku A i pri tome $p(O,A) \not\perp \alpha$, tada je $\alpha \cap L = k(O')$ pri čemu je $p(O,O') \perp \alpha$.

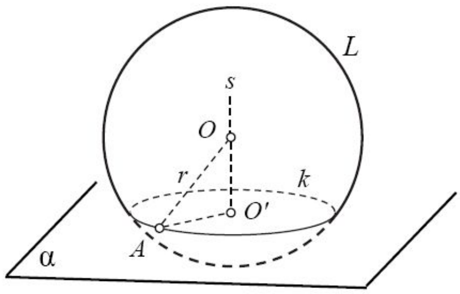
Dokaz. Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

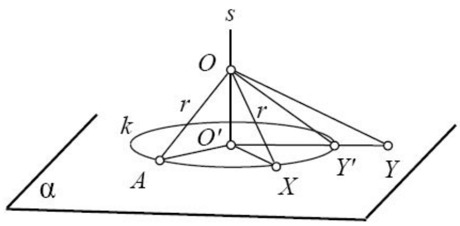
(a) Ako je $O \in \alpha$, tada je $\alpha \cap L = k(O; r)$.

(b) Neka $O \notin \alpha$. Posmatrajmo pravu $s(O) \perp \alpha$ i neka je $s \cap \alpha = \{O'\}$. Uočimo kružnicu $k(O'; O'A)$ i posmatrajmo sljedeće podslučajeve:

   (i) Posmatrajmo tačku $X \in k(O'; O'A)$. Tada je, na osnovu pravila (SUS), $\triangle OO'X \cong \triangle OO'A$, pa je $OX = OA = r$, tj. $X \in L$.

   (ii) Posmatrajmo tačku $Y \notin k(O'; O'A)$. Tada $Y \in \text{int}k \cup \text{ext}k$. Ako $Y \in \text{ext}k$, tada je $OY > OY' = r$, pa $Y \notin L$. S druge strane, Ako $Y \in \text{int}k$, tada je $OY < OY' = r$, pa $Y \notin L$.



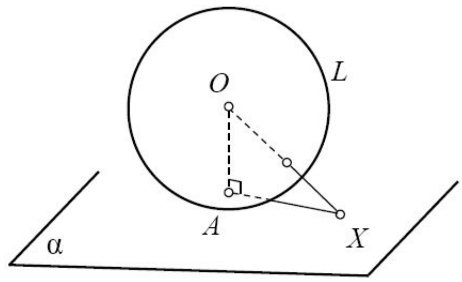


□

Teorema 4.17

Ako ravan α i sfera $L(O; r)$ imaju zajedničku tačku A i pri tome $p(O, A) \perp \alpha$, tada je $\alpha \cap L = \{A\}$. (Ovakva ravan α se naziva **tangentna ravan** sfere L u tački A.)

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljnu tačku $X \in \alpha$ takvu da $X \neq A$. Tada iz $\triangle OAX$ slijedi da je $OX > OA = r$ pa $X \notin L$.



□

Teorema 4.18

Ako ravan α i sfera $L(O;r)$ imaju zajedničku tačku A, tada je $\alpha \cap L = \{A\}$ akko je $p(O,A) \perp \alpha$.

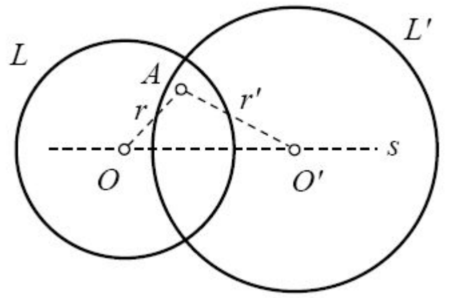
Teorema 4.19

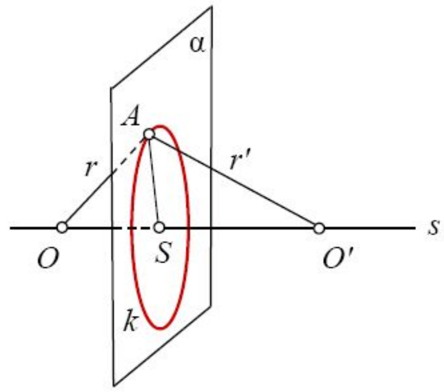
U svakoj tački lopte postoji jedna i samo jedna tangentna ravan.

Teorema 4.20

Ako dvije sfere $L(O;r)$ i $L'(O';r')$ imaju zajedničku tačku A, takvu da je $A \notin p(O,O')$, tada je $L \cap L' = k(S)$. Kružnica k leži u ravni α gdje je $\alpha \perp p(O,O')$ i $S \in p(O,O')$

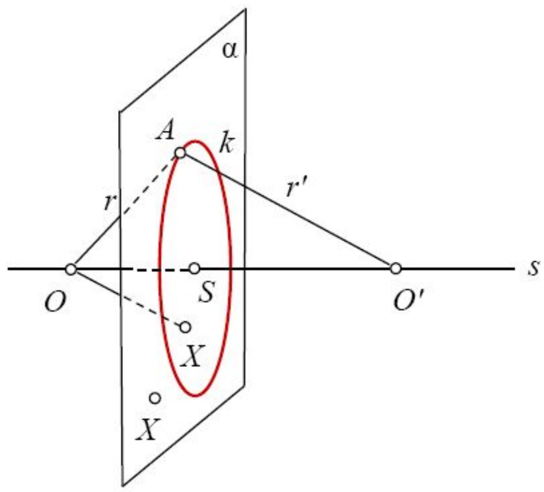
Dokaz. Posmatrajmo pravu $s = p(O,O')$, ravan $\alpha(A) \perp s$ i neka je $\alpha \cap s = \{S\}$. Tada je $k(S;SA) \subset \alpha$ te zva svaku tačku $X \in k$ vrijedi da $X \in L$ i $X \in L'$. Dakle, $k \subset L \cap L'$.





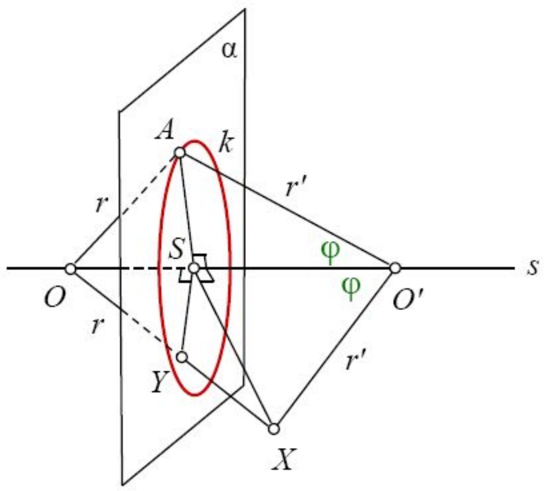
Posmatrajmo sada tačku $X \notin k$ i razmatrajmo sljedeće slučajeve:

(a) Neka $X \in \alpha$. Tada $X \in \mathrm{int}k \cup \mathrm{ext}k$. Ako $X \in \mathrm{int}k$ tada je $OX < r$ pa $X \notin L$ a samim tim i $X \notin L \cap L'$. Ako $X \in \mathrm{ext}k$ tada je $OX > r$ pa $X \notin L \cap L'$. Dakle, ako $X \in \alpha \backslash k$ tada $X \notin L \cap L'$.



(b) Neka $X \notin \alpha$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $X \in L \cap L'$. Tada je $OX = r$ i $OX' = r'$ pa je na osnovu pravila (SSS) $\triangle OO'X \cong \triangle OO'A$. Zato je $\sphericalangle XO'O \cong \sphericalangle AO'O = \varphi$. Dalje je na osnovu pravila (SUS) $\triangle SO'X \cong \triangle SO'A$ pa je $\sphericalangle XSO' \cong \sphericalangle ASO' = 90°$. Dakle, $p(S, X) \perp s$.

Dalje, neka je $\alpha \cap r(X, O, O') = p(S, Y)$. Kako je $s(O, O') \perp \alpha$ tada je $p(S, Y \perp s)$. Dakle, činjenice da su $p(S, X) \perp s$ i $p(S, Y) \perp s$ su kontradiktorne.



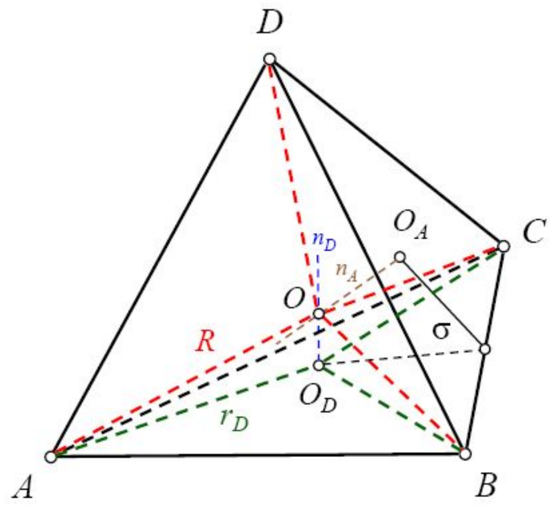
□

Teorema 4.21

Za svaki tetraedar postoji jedna i samo jedna opisana sfera (koja sadrži sva tjemena tetraedra).

Dokaz. Prvo, dokažimo egzistenciju takve sfere.

Neka je O_D centar kružnice $k(A, B, C)$, neka je $O_DA = O_DB = O_DC = r_D$ i uočimo pravu $n_D(O_D) \perp ABC$. Neka je O_A centar kružnice $k(B, C, D)$ i uočimo pravu $n_A(O_A) \perp BCD$. Označimo sa $N_D \cap n_A = \{O\}$. Tada je $\triangle OO_DA \cong \triangle OO_DB \cong \triangle OO_DC$ pa je $OA = OB = OC$. Također, kako je $\triangle OO_AB \cong \triangle OO_AC \cong \triangle OO_AD$ tada je $OB = OC = OD$. Dakle, $OA = OB = OC = OD = R$, tj. $A, B, C, D \in L(O; R)$.

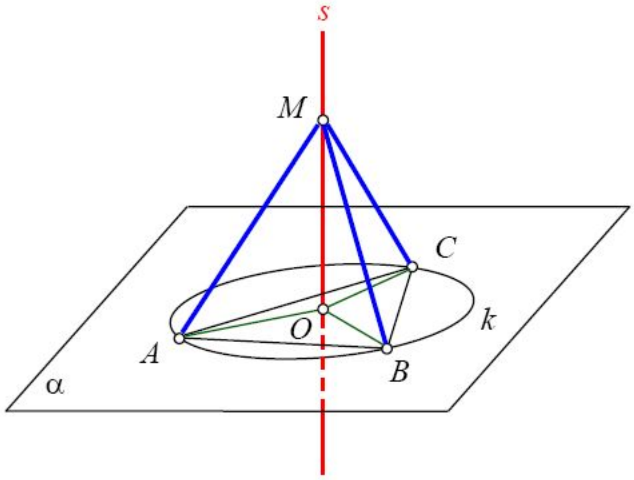


Dokažimo sada jedinstvenost te sfere. Za dokaz jedinstvenosti nam je potrebna sljedeća

Lema 4.22

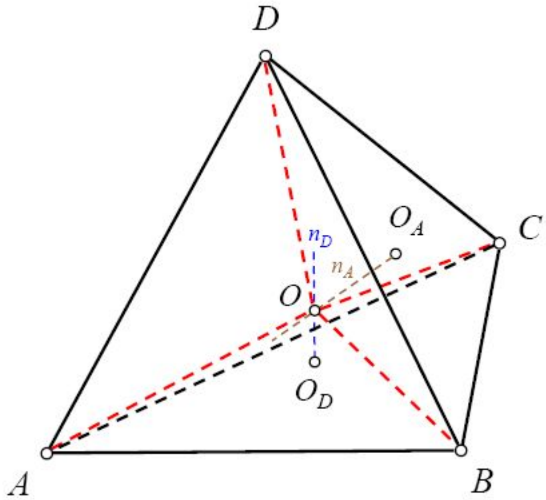
Dat je $\triangle ABC$. Skup svih tačaka M u prosotoru takvih da je $MA = MB = MC$ je prava koja je normalna na ravan ABC i koja sadrži centar kružnice opisane oko $\triangle ABC$.

Dokaz. Posmatrajmo ravan $\alpha(A, B, C)$ i neka je tačka O centar kružnice $k(A, B, C)$. Uočimo pravu $s(O) \perp \alpha$. neka je $M \in s$. Tada je na osnovu pravila (SUS) $\triangle MOA \cong \triangle MOB \cong \triangle MOC$ pa je $MA = MB = MC$. s druge strane, neka je $MA = MB = MC$. Posmatrajmo pravu $s'(M) \perp \alpha$ i neka je $s' \cap \alpha = \{O'\}$. Tada je na osnovu pravila (SSU) $\triangle MO'A \cong \triangle MO'B \cong \triangle MO'C$ pa je $O'A = O'B = O'C$. Ali tada je $O' \equiv O$, tj. $s' \equiv s$ odnosno $M \in s$.



□

Posmatrajmo sada sferu $L(O; A, B, C, D)$. Tada je $OA = OB = OC = OD$. Kako je $OA = OB = OC$ tada $O \in n_D$ i kako je $OB = OC = OD$ tada $O \in n_A$.



Pretpostavimo da postoji sfera $L'(O'; A, B, C, D)$ pri čemu je $O' \neq O$. Tada je $O'A = O'B = O'C = O'D$. Kako je $O'A = O'B = O'C$ tada $O' \in n_D$ i kako je $O'B = O'C = O'D$ tada $O' \in n_A$.

Dakle, $O' \equiv O$ što j kontradiktorno sa $O' \neq O$. □

Bibliografija

[1] M. Stanković, *Osnovi geometrije*, Prirodno-matematički fakultet u Nišu, Niš, 2006.

[2] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolična geometrija*, Total design i Matematički fakultet, Beograd, 1997.

[3] M. Prvanović, *Neeuklidske geometrije*, Novi Sad, 1974.

[4] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Beograd, 1987.

[5] D. Lopandić, *Geometrija*, Grđevinska knjiga, Beograd, 1987. http://poincare.matf.bg.ac.rs/zlucic/LopandicGeometrija.pdf

[6] R. Tošić, V. Petrović, *Zbirka zadataka iz osnova geometrije*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1990.